1. El quinto postulado de Euclides

Un sistema de ecuaciones lineales solo puede tener ninguna, una o infinitas soluciones, un hecho que se debe a que cada ecuación del sistema de ecuaciones puede representarse gráficamente como un plano; el corte de tres planos distintos solo puede producir o un punto (si dos planos se cortan en una recta y esta, a su vez, cruza el plano restante), o una recta (si los tres planos forman un haz y coinciden en ella como páginas de un libro encontrándose en el lomo), o nada (si por ejemplo dos planos son paralelos o forman las caras de un prisma triangular). En el primer caso tendríamos una única solución que correspondería a las coordenadas del punto de corte, en el segundo infinitas, correspondientes a la recta común a los tres planos, y ninguna en el último, no habría solución al no existir punto alguno que cumpliese al mismo tiempo las tres ecuaciones.

Todo esto es una consecuencia de los postulados de la Geometría Euclídea, que son equivalentes a los siguientes:

1. Se puede trazar una y solo una línea que una dos puntos diferentes.
2. Toda recta puede prolongarse indefinidamente.
3. Con un centro como centro y una distancia como radio puede trazarse una y solo una circunferencia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una recta corta a otras dos formando a un lado ángulos cuya suma es menor que la de dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de ese lado (habitualmente se formula como «por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada»).

Los cinco postulados hacen referencia a la geometría sobre dos dimensiones, pero al trabajar con 3 planos se puede considerar uno de ellos como base de un plano cartesiano y considerar, en lugar de los otros dos planos, sus intersecciones con el que usamos como espacio bidimensional tradicional.

El problema se reduce entonces a un problema en un espacio de dos dimensiones con una única solución si las dos rectas se cortan, infinitas si fuesen la misma o, como nos garantiza el quinto postulado de Euclides, ninguna si fuesen paralelas.

Durante cerca de dos milenios hubo un enconado debate entre los geómetras respecto a este quinto postulado, pues unos opinaban que este era redundante y consecuencia de los otros cuatro, y otros que su enunciado era necesario y que no se derivaba del resto de propiedades de la Geometría Euclídea. Este debate duró hasta el siglo XIX, cuando **Bolyai** y **Lobatchevsky** trabajaron sobre geometrías que carecían de tal postulado, tratando de ver si lo deducían como teorema, en cuyo caso dependería de los otros cuatro y quedaría zanjado el debate en un sentido, o llegaban a alguna contradicción, y entonces sería necesario formularlo explícitamente. Se halló que el postulado era necesario para definir la geometría euclídea pero los matemáticos se llevaron una gran sorpresa al comprobar que las geometrías que no lo establecían eran consistentes: en ellas una recta puede tener varias paralelas (rectas con las que no se corten y que sean coplanarias con ella) que pasen por un mismo punto y la suma de los ángulos de un triángulo ser menor que 180°, o pueden no existir rectas paralelas, producirse en ocasiones dos puntos de corte entre rectas y que los ángulos de un triángulo sumen más de 180°. Algo difícil de imaginar, *¿no?*

Este hallazgo supuso un cambio de paradigma, pues el espacio dejó de ser un marco sin propiedades en el cual se desarrolla la geometría para convertirse en un objeto matemático con propiedades inherentes y sujeto a estudio.

Gracias a este cambio de paradigma el conocimiento que tenemos sobre el mundo ha aumentado muchísimo. Años más tarde, **Bernhard Riemann** estudió a fondo las geometrías no euclídeas introduciendo el concepto de curvatura del espacio. Después, en 1920, **Einstein** utilizó estas geometrías para describir la geometría del espacio-tiempo bajo los efectos de la gravedad como un espacio curvado. Y a día de hoy los cosmólogos teorizan con diferentes geometrías tratando de determinar cuál de ellas establece la forma de nuestro universo.

1 **¿Por qué hay que especificar que tratamos con tres planos distintos? ¿Qué significa eso en términos del sistema de ecuaciones, y qué implicaría en el estudio de los puntos solución la ausencia de esa condición?**

2 **Decimos que el estudio de las dos rectas a las que podemos reducir los tres planos pueden ser secantes o paralelas, ¿por qué no pueden cruzarse, sin más, en direcciones distintas?**

3 **¿Puedes pensar en una geometría cuyo uso sea cotidiano y que no sea euclídea?**

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

JOYCE, D. E.
Los Elementos de Euclides (en línea). [Fecha de consulta, 2 de diciembre de 2008]. Disponible en http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm

2. Programación lineal

En los sistemas lineales las relaciones presentes en las ecuaciones son igualdades, pero desde la Segunda Guerra Mundial comenzó a estudiarse con atención cómo resolver problemas en los que estas fueran también desigualdades. A este estudio se le denomina **Programación Lineal.** Su objeto fue el de modelizar problemas reales de suministro, abastecimiento y gestión de objetos, recursos y personas, y tratar de resolverlos mediante algoritmos matemáticos que facilitaran soluciones óptimas.

Por ejemplo, dos problemas tipo de la programación lineal serían considerar cuántos productos de su catálogo debe construir una empresa en función de su coste de fabricación, precio de venta y demanda del producto, o cómo repartir una serie de mercancías de varios orígenes a varios destinos por una red de forma que el coste total de los desplazamientos sea mínimo.

Como ejemplo consideremos una zapatería que hace tres modelos de zapatos A, B y C a un coste de 20 €, 15 € y 13 € por par, respectivamente, gastando 14 € en la fabricación del primero, 7 € en del segundo y 6 € en el tercero. Si además, la demanda del primero es como mínimo un 25 % mayor que la del segundo y, al menos, un 25 % menor que la del tercero y si al mes solo puede fabricar 200 pares de zapatos, el problema es equivalente a considerar el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 \leq 200 \\ x_1 - \dfrac{5}{4}x_2 \geq 0 \\ \dfrac{5}{4}x_1 - x_3 \leq 0 \\ (20-14)x_1 + (15-7)x_2 + (13-6)x_3 = \text{Beneficio} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

En el que el objetivo es maximizar el Beneficio ajustando los valores de x_1, x_2 y x_3.

El primer matemático que investigó a fondo la programación lineal fue **George Bernard Dantzig,** que durante la Segunda Guerra Mundial trabajó en resolver problemas de este tipo para el Ejército de los Estados Unidos. Dantzig fue el creador del algoritmo **Simplex** para encontrar la solución a esta clase de problemas, obteniéndola de una manera mecánica y con cálculos sencillos, un planteamiento que se ha visto beneficiado con posterioridad del uso de los ordenadores.

Durante sus estudios universitarios Dantzig protagonizó una anécdota arquetípica del genio despistado: un día llegó tarde a la clase de su profesor Jerzy Neyman y vio en la pizarra escritos dos problemas. Creyendo que eran deberes de clase los apuntó y luego, en su casa, se puso a trabajar en ellos. Comentó luego que los había visto algo más difíciles de lo habitual, pero al par de semanas encontró la solución de ambos y se la entregó a su profesor. Al par de semanas este fue a buscarle y le explicó que no eran deberes para casa, sino problemas de estadística cuya solución hasta la fecha era desconocida. Neyman logró que publicasen uno en una revista matemática y años más tarde Abraham Wald fue informado de que las conclusiones de una investigación suya coincidían con las que había alcanzado Dantzing al resolver el otro problema, por lo que incluyó a Dantzig como coautor.

1 **Si las ecuaciones habituales de un sistema lineal son equiparables a planos en el espacio R3, ¿qué representan las inecuaciones? ¿Y su conjunto?**

2 **¿Habría que imponer alguna condición más al sistema de inecuaciones propuesto como ejemplo?**

3 **¿Podrá haber en programación lineal sistemas con una cantidad finita de soluciones diferente de uno?**

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Morales Medida, Miguel Ángel

La leyenda de Dantzig (en línea). [Fecha de consulta: 2 de diciembre de 2008]. Disponible en http://gaussianos.com/la-leyenda-de-dantzig

3. Karl Gauss

Karl Friedrich Gauss matemático, físico y astrónomo alemán, nació en Brunswick, actual Alemania, en 1777, en el seno de una familia humilde, y murió en Götingen, en 1855. Desde muy temprana edad, el joven Karl dio muestras de una prodigiosa capacidad para las matemáticas.

Gauss tenía diez años cuando, un día en la escuela, el profesor mandó sumar los cien primeros números naturales. El maestro pensaba que tendría ocupados a sus alumnos un buen rato, pero a los pocos segundos Gauss tenía la solución: «El resultado es 5 050». Gauss había deducido la fórmula de la suma de *n* términos de una progresión aritmética conociendo el primero y el último de la misma.

La brillantez del joven Karl facilitó que el duque de Brunswick le ayudase económicamente para la realización de sus estudios. Su tesis doctoral se centró en la demostración del teorema fundamental del álgebra. También demostró que los números se podían representar mediante puntos en un plano.

Gauss estableció un método para construir un polígono equilátero de 17 lados con ayuda de regla y compás, demostrando matemáticamente que solamente se podían construir determinados polígonos equiláteros con ayuda de regla y compás.

En 1801 publicó sus investigaciones sobre la Teoría de *números,* estructurando y sistematizando esta rama matemática. Ese mismo año predijo la órbita del asteroide Ceres, lo que le proporcionó gran fama. Unos años después, en 1809, fue nombrado director del Observatorio de Götingen, cargo en el que permaneció toda su vida.

En el campo del trabajo matemático, entre otras muchas cosas, Gauss elaboró trabajos como la primera prueba de la ley de la reciprocidad cuadrática, resolvió problemas geométricos sin resolver desde los tiempos de Euclides y desarrolló en 1794 el método de los mínimos cuadrados que hoy en día es la base de modernas herramientas de estimación astronómica.

En torno al año 1820, buscando la determinación matemática de la forma y el tamaño del globo terráqueo, Gauss desarrolló herramientas para el tratamiento de los datos observacionales, entre las que destaca la curva de distribución de errores, conocida también como distribución normal o Campana de Gauss, y que constituye uno de los pilares de la estadística y que es usada en todo tipo de disciplinas no matemáticas, siempre que los datos puedan ser afectados por errores sistemáticos y casuales, como ocurre, por ejemplo, en la psicología diferencial.

Trabajó junto al físico Wilhelm Weber durante seis años, investigando las Leyes de Kirchhoff, y elaborando publicaciones sobre magnetismo. Incluso abordó la construcción de un telégrafo eléctrico primitivo.

Sus estudios sobre el magnetismo terrestre, han llevado a denominar la unidad de flujo magnético con su nombre, denominada gauss en su honor. Por su contribución al desarrollo de la Ciencia, recibió, en 1838, junto a Michael Faraday, la prestigiosa Medalla Copley, otorgada por la Royal Society de Londres.

En su ciudad natal se erigió una estatua en su honor, que descansa sobre un pedestal en forma de estrella de 17 puntas, en celebración de su descubrimiento de la construcción del polígono de 17 lados.

Solucionario

1. El quinto postulado de Euclides

1 Se habla de tres planos distintos porque pudiera ocurrir que dos o más planos fuesen en realidad el mismo escrito de maneras diferentes. Esto significaría que en realidad no se tendrían tres ecuaciones no triviales, sino dos, y el corte de dos planos solo podría dar o bien infinitas soluciones, si los planos se cortan, o ninguna, si fuesen paralelos.

2 Porque las dos forman parte de un mismo plano, el que se utiliza como base de un espacio euclídeo de dos dimensiones, y todas las rectas de un plano son o bien paralelas o secantes.

3 Por ejemplo, la cartografía representa mediante planos una superficie que es curva. Para ver que la geometría de la superficie de la Tierra no es euclídea basta con ver que los meridianos son paralelos en el ecuador pero se cortan en los polos y que puede trazarse sobre ella un triángulo cuyos ángulos no sumen 180º (por ejemplo uno formado por un trozo de ecuador y dos meridianos que se corten en ángulo recto en los polos sumará 270º).

2. Programación lineal

1 Las inecuaciones representan la división del plano que queda del lado del mismo que cumple la ecuación. De esta manera, el conjunto de inecuaciones representará la porción del espacio resultante de hacer la intersección entre todas esas divisiones, y la solución será el punto o los puntos de dicho espacio en los que la función del beneficio tome su valor más alto.

2 En este ejemplo y al tratarse de unidades de producto fabricadas habría que añadir la necesidad de que los valores de las variables deberán ser números enteros.

3 Sí. Como en este ejemplo la solución se reduce a aquellas que son números enteros podría darse el caso de que dos conjuntos de puntos finitos y distintos de uno maximizasen la función objetivo, y por tanto fuesen todos ellos soluciones óptimas.