UNIDAD 1

Números reales

DESARROLLO DE COMPETENCIAS SA

Números irracionales

El conjunto de los números es enorme. Estructurado en diferentes tipos según sus características, nos ayudan a cuantificar, medir, expresar relaciones...

¿Y en el arte? ¿Pueden expresar belleza los números? ¿Y la naturaleza? ¿Entiende de números? La estética y la organización del espacio también están relacionadas con los números, en concreto con los números irracionales. Legados culturales que conservan nuestras ciudades así lo muestran. Veremos cómo.

SOLO PARA CURIOSOS

La teoría de números

22ms0s401

Después de leer...

1. ¿Es posible ver un número irracional? Buscad en el texto dónde y cómo se puede encontrar un número irracional y de qué número se trata.
2. La proporción cordobesa se representa por un número irracional. ¿Qué valor aparece en el texto? ¿Cuál es su expresión exacta?
3. ¿Conocéis alguno de los monumentos de al-Ándalus? ¿Cuáles? ¿Qué recordáis de ellos?
4. Entre los Objetivos de Desarrollo Sostenible se habla de las ciudades. En particular de proteger y salvaguardar el patrimonio cultural y natural del mundo. ¿Creéis que iniciativas como la de esta exposición podrían ayudar a la conservación de estos monumentos? ¿Cómo?

Las claves matemáticas de los principales monumentos de al-Ándalus

Los científicos andalusíes descollaron en muchos aspectos: astronomía, medicina, arquitectura o ingeniería son algunas de las disciplinas en las que al-Ándalus aportó sus sabios al conocimiento en Europa. **También eran excelentes en matemáticas,** una ciencia base cuyos postulados suelen estar en la base del resto de las disciplinas.

Los números se entienden como **una cuestión abstracta,** difícil de observar en la naturaleza y más aún conforme las matemáticas adquieren complejidad. **¿Es posible 'ver' una raíz cuadrada o cúbica?** ¿Y apreciar la armonía de una proporción áurea?

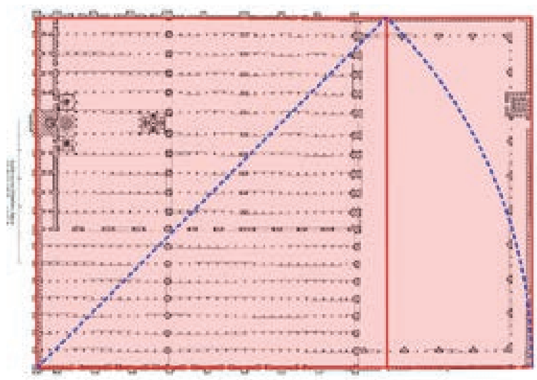
La respuesta es sí, y puede conseguirse gracias a **las matemáticas que los científicos andalusíes aplicaron a sus principales monumentos,** aún visibles más de un milenio después de que fueran levantados. La **Fundación Descubre** ha elaborado el **estudio más profundo sobre la aplicación de las matemáticas al arte** monumental andalusí que puede verse en una exposición.

Se titula **'Paseo Matemático al-Ándalus'** y en ella se explican con paneles informativos y nuevas tecnologías los patrones aplicados en seis grandes espacios monumentales. [...]

La **proporción cordobesa** es uno de los principios matemáticos que recorre el arte andalusí y que aparecen bien explicados en la exposición. En términos numéricos, **equivale a 1,306,** por debajo de la más conocida razón áurea (1,618) y más cercana a la raíz cuadrada de 2 (1,414). En geometría, **es muy fácil construir un rectángulo cordobés:** centrado en el interior de un octógono, su lado más corto es cualquiera de los ocho. En términos más precisos, es la relación entre el radio de una circunferencia circunscrita a un octógono regular y cualquiera de sus lados.

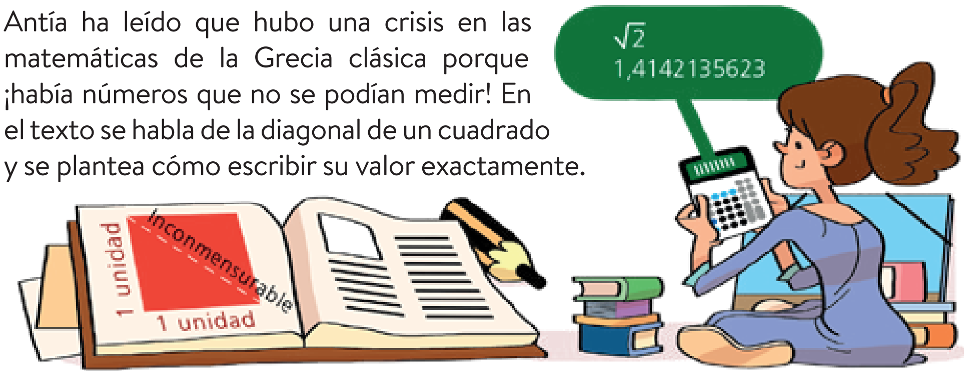
[...] En la mezquita de Córdoba podemos ver la proporción raíz de 2. El rectángulo cordobés se llama así porque aparece con frecuencia en los monumentos andalusíes y fue descubierto en Córdoba por el arquitecto **Rafael de la Hoz Arderius.**

FUENTES: Rafa VERDÚ, abc.es (9 de noviembre 2021), Exposición y Proyecto "Paseo Matemático al-Ándalus"



1 Números racionales e irracionales

Antía ha leído que hubo una crisis en las matemáticas de la Grecia clásica porque ¡había números que no se podían medir! En el texto se habla de la diagonal de un cuadrado y se plantea cómo escribir su valor exactamente.



La expresión decimal de $\sqrt{2}$ no se acaba donde muestra la pantalla, tiene infinitas cifras decimales y no es periódica.

Antía repasa lo que sabe de los números racionales: se pueden expresar como una fracción de números enteros. Por ejemplo:

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} = \frac{73}{73} = \ldots;\ 1{,}4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} = \frac{-21}{-15} = \ldots;\ 1{,}\widehat{4} = \frac{13}{9} = \frac{26}{18} = \frac{-39}{-27} = \ldots$$

Los **números racionales** son aquellos que se pueden expresar como una fracción, $\frac{a}{b}$, siendo a y b dos números enteros con $b \neq 0$.

Presta atención

Exacto → Racional

$\sqrt{2} \neq 1{,}4142135623$

Irracional

$\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots$

Antía vuelve a mirar el resultado de la pantalla. ¿Qué pasa con $\sqrt{2}$?

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309\ldots$$

Su expresión decimal es no exacta y no periódica.

No se ajusta a ninguno de los casos anteriores, no tiene expresión fraccionaria; se trata de un número no racional. Decimos que es **irracional.**

Los **números irracionales** son los que no se pueden expresar como fracción. Su expresión decimal es ilimitada y no periódica.

Números reales

Todos los números que conocemos y utilizamos están clasificados en grupos que se han ido ampliando y estructurando. Todos ellos son **números reales.**

Con ellos, Antía ha completado su clasificación.

El conjunto de los **números reales** es el que está formado por todos los números racionales e irracionales.

Ejercicio resuelto

1 **Clasifica estos números en racionales e irracionales:** $-34{,}5678910\ldots$ $34{,}5678$ $\frac{3}{2}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt{9}$ -19

Solución

- Racionales: 34,5678 (decimal exacto), $\frac{3}{2}$ (fracción), $\sqrt{9} = 3$ (natural), -19 (entero) porque se pueden expresar como fracción.
- Irracionales: $-34{,}5678910\ldots$, $\sqrt{7}$ porque tienen expresión decimal no exacta y no periódica.

Actividades

2 Determina, con lápiz y papel, la expresión decimal de estas fracciones hasta poder indicar a qué tipo de número decimal corresponden cada uno.

a) $\dfrac{-35}{8}$ c) $\dfrac{23}{7}$

b) $\dfrac{31}{11}$ d) $-\dfrac{17}{6}$

Observa las operaciones realizadas y explica por qué una fracción no puede representar un número irracional.

3 Escribe en tu cuaderno estos números y clasifícalos según el tipo de número decimal que son. Calcula la fracción generatriz en cada caso.

a) $3{,}24$ c) $3{,}\widehat{24}$

b) $3{,}2\widehat{4}$ d) $32{,}\widehat{4}$

4 ¿Cuáles de estos números decimales se pueden expresar como una fracción? Halla esa fracción cuando sea posible.

a) 5,010101...

b) −6,1811881...

c) 93,5353535...

d) −5,010110111...

e) 7,8999999...

f) −0,1357911...

5 Decide si estos números son racionales o irracionales.

$3{,}7$ $\sqrt{18}$ $\sqrt[3]{5}$ $-4{,}3525252...$ $\sqrt{\dfrac{8}{2}}$

6 Dibuja en tu cuaderno el esquema que estructura los conjuntos numéricos y sitúa estos números en el lugar que les corresponda.

$\sqrt{\dfrac{9}{4}}$ $-\dfrac{56}{7}$ 13 $\sqrt{3}$ $\sqrt{121}$

7 Intenta averiguar la cifra decimal que ocupa el décimo lugar para cada uno de estos números.

a) $\dfrac{53}{11}$ b) $\dfrac{\pi}{11}$

¿Qué diferencias encuentras? ¿A qué se deben?

8 Estudia los siguientes números y contesta: *¿qué tipo de número puede ser la raíz cuadrada de una fracción?*

$\sqrt{\dfrac{5}{4}}$ $\sqrt{\dfrac{64}{25}}$ $\sqrt{\dfrac{36}{9}}$ $\sqrt{\dfrac{18}{2}}$

9 Calcula el resultado de estas operaciones utilizando primero la expresión decimal y después con fracciones. ¿Obtienes el mismo resultado?

a) 2,8666... + 3,2222... c) −4,3333... · 3

b) 1,8333... + (−1,6) d) 5,6262... · 0,5

Reflexiona: *¿son racionales la suma y el producto de números racionales?*

10 Indica si es verdadera o falsa esta afirmación: *la suma de dos números irracionales puede ser un número racional.* Justifica tu respuesta con ejemplos.

11 Averigua si la longitud de la diagonal del rectángulo es un número racional o irracional en cada caso.

a) Si la base mide $\dfrac{3}{4}$ cm y la altura, 1 cm.

b) Si la base mide $\dfrac{1}{2}$ cm y la altura, 1 cm.

12 Una empresa necesita ampliar su plantilla y decide promover el empleo en su localidad contratando a jóvenes sin experiencia y personas con discapacidad, sin que el número total de empleados supere los 500. Después de la contratación los porcentajes son:

	Antiguos trabajadores	Jóvenes	Discapacitados
Porcentaje	70 %	25 %	5 %

a) ¿Cuántos empleados puede tener esta empresa?

b) ¿Cuántos trabajadores son en total? ¿Cuántos jóvenes contrataron? ¿Y con discapacidad?

+ COMPETENTES SA

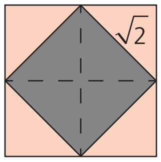
13 ¿Es $\sqrt{2}$ un número irracional? ¿Por qué? Demuéstralo siguiendo estas indicaciones:

1. Si fuese racional, se podría escribir como fracción irreducible: $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$
2. Elévalo al cuadrado y despeja a^2.
3. Recuerda: en un cuadrado perfecto, cada número primo aparece un número par de veces. Por ejemplo: $a = 2^3 \cdot 5 \rightarrow a^2 = \left(2^3 \cdot 5\right)^2 = 2^6 \cdot 5^2$
4. Piensa cuántas veces aparecería el factor 2 al despejar a^2. ¿Qué ocurre? ¿Es eso posible?

Ahora reflexiona y razona. Si $\sqrt{2}$ es un número irracional, ¿$1 + \sqrt{2}$ qué tipo de número es?

2 Relaciones de orden. Representación

Ernesto ha construido un gran mural con cuatro tablones cuadrados de 1 m de lado. Sobre sus diagonales quiere colocar otro cuadrado de chapa que sabe que mide exactamente $\sqrt{2}$ m de lado.



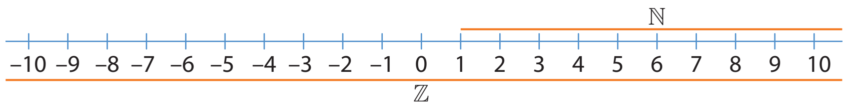
Le han vendido un cuadrado de 1,5 m de lado y está seguro de que no se ajustará. Lo compara sobre el mural y comprueba que, en efecto, le sobra un trozo:

$1{,}5 - \sqrt{2} > 0 \rightarrow 1{,}5$ es mayor que $\sqrt{2}$.

> Dados dos números reales cualesquiera, a y b: a es mayor que b si $a - b > 0$, a es menor que b si $a - b < 0$ y a es igual a b si $a - b = 0$.

Al superponer la chapa sobre el mural haciendo coincidir los vértices, uno de los extremos de la chapa queda separado. ¿Cómo puede representarlo?

Así representamos los números enteros:



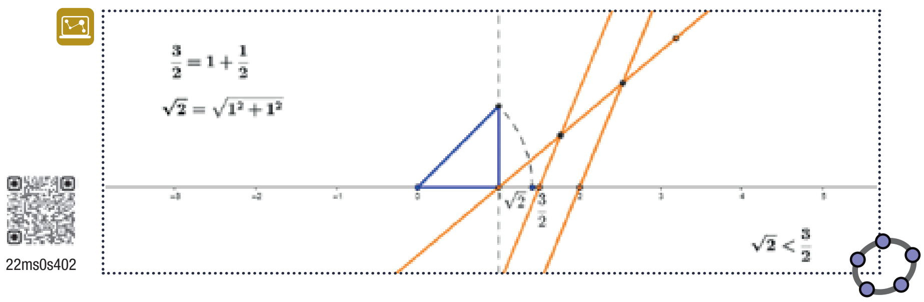
Para representar números racionales de forma exacta podemos utilizar el teorema de Tales y dividir una unidad en partes iguales trazando paralelas.

Si el número es irracional, pero se puede expresar como una raíz cuadrada no exacta de un número natural, podemos usar el teorema de Pitágoras para representarlo de forma exacta sobre la recta.

De este modo, Ernesto puede determinar de forma exacta las longitudes de la diagonal y del lado de la chapa, compararlas y saber lo que sobra.

Presta atención

Para representar una fracción, siempre se utiliza la fracción irreducible.



> Fijado un origen, el 0, y una unidad, a cada número real le corresponde un único punto sobre la **recta real,** y a cada punto de ella le corresponde un solo número real. Dos números que coinciden en el mismo punto son iguales.

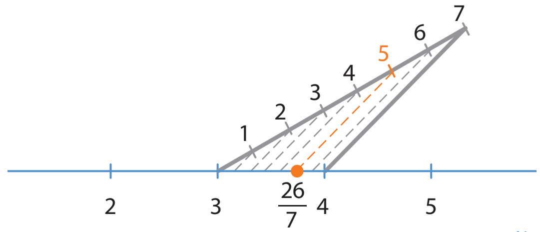
Ejercicio resuelto

14 **Representa el número racional $\frac{26}{7}$ aplicando el teorema de Tales.**

Solución

$\frac{26}{7} = 3 + \frac{5}{7} \rightarrow 3 < \frac{26}{7} < 4$

Entre 3 y 4 determinamos $\frac{26}{7}$ en la recta real.



15 Compara estos pares de números reales.

a) $2{,}3101$ y $2{,}3\overset{\frown}{10}$

b) $12{,}92\overset{\frown}{3}$ y $12{,}9\overset{\frown}{23}$

c) $-5{,}828228222...$ y $-5{,}\overset{\frown}{82}$

d) $-7{,}1\overset{\frown}{45}$ y $-7{,}14\overset{\frown}{54}$

e) $-\dfrac{39}{11}$ y $-\dfrac{25}{7}$

f) $\sqrt{44}$ y $\dfrac{73}{11}$

16 Ordena de menor a mayor.

$3{,}2\overset{\frown}{32}$ $\quad -3{,}2\overset{\frown}{23}$ $\quad -3{,}223344...$

$3{,}233$ $\quad -3{,}2\overset{\frown}{3}$ $\quad 3{,}23$ $\quad 3{,}232233...$

17 Ordena estos números de mayor a menor.

$\sqrt[3]{19}$ $\quad -\dfrac{34}{13}$ $\quad \dfrac{19}{7}$

$2{,}64\overset{\frown}{57}$ $\quad -\sqrt{7}$ $\quad -2{,}6\overset{\frown}{45}$

18 Representa gráficamente en la recta real.

a) $\dfrac{3}{7}$ c) $-\dfrac{5}{7}$

b) $\dfrac{17}{7}$ d) $-\dfrac{12}{7}$

19 Representa de forma exacta en la recta real y ordena de menor a mayor en cada caso:

a) $\dfrac{6}{5}, -\dfrac{3}{8}, -\dfrac{26}{3}, \dfrac{17}{6}$

b) $-\dfrac{30}{8}, -\dfrac{26}{7}, -\dfrac{19}{5}, -\dfrac{22}{6}$

20 Sitúa estos números irracionales de forma exacta sobre la recta real.

a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{17}$ c) $\sqrt{8}$

21 Representa $\sqrt{18}$ gráficamente de forma exacta. Explica qué cambios tienes que hacer para representar $-\sqrt{18}$ y sitúalo también en la recta.

22 Representa de forma exacta estos números, eligiendo en cada caso el método más adecuado.

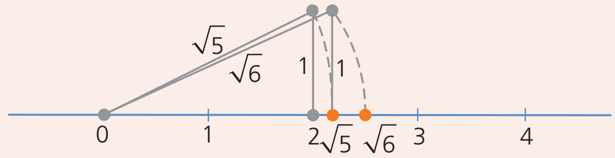
a) $-3{,}25$ b) $4{,}16$ c) $-\sqrt{13}$

23 Representa gráficamente en la recta real el número $\pi = 3{,}14159265358979...$ ¿Cómo lo haces? ¿Es posible representarlo de forma exacta?

24 Piensa cómo podrías representar de forma exacta en la recta real el número irracional $2\sqrt{10}$. Escribe de forma ordenada los pasos necesarios.

25 Sitúa $\sqrt{17}$ sobre la recta. Aplica el teorema de Tales para representar $\dfrac{\sqrt{17}}{3}$. ¿Cómo lo haces?

26 Observa la representación de $\sqrt{6}$ y explica por escrito y paso a paso cómo se ha realizado.



27 Fíjate en la actividad anterior y representa:

a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{11}$ c) $\sqrt{14}$

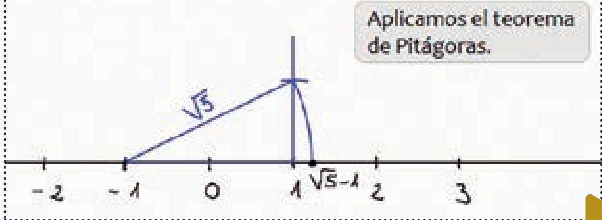
Ejercicio resuelto

28 Representa en la recta real el número $\sqrt{5} - 1$.

Solución

$\sqrt{5} - 1 = -1 + \sqrt{5} = -1 + \sqrt{2^2 + 1^2}$

Aplicamos el teorema de Pitágoras.



22ms0s403

29 Representa los siguientes números irracionales.

a) $2 + \sqrt{5}$ b) $-3 + \sqrt{2}$ c) $\dfrac{3 + \sqrt{10}}{2}$

+ COMPETENTES SA

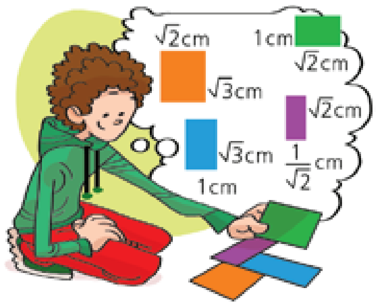
30 Representa de forma exacta en la recta real, por orden, estos números:

$1 \quad \sqrt{5} \quad 1 + \sqrt{5} \quad \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

a) ¿Qué tipo de número es cada uno de ellos? Explica los pasos que has seguido para situarlos sobre la recta.

b) Investiga si alguno de ellos es número metálico. ¿Cómo se llama?

3 Propiedades de las operaciones

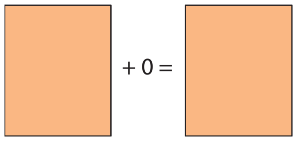


Diego elabora un mosaico con estas piezas. Al ir calculando lo que mide y ocupa la construcción, descubre distintas propiedades.

Propiedades de la suma

Elemento neutro: 0

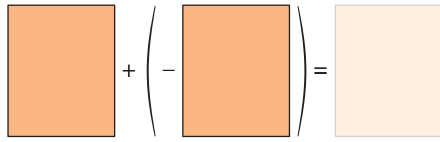
Si no añade ninguna pieza a ningún lado, la longitud no varía.



$$\sqrt{2} + 0 = \sqrt{2}$$

Elemento opuesto: $-a$

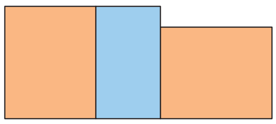
Quitar una pieza después de ponerla no afecta al resultado.



$$\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0$$

Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$

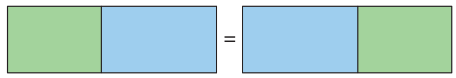
Da igual cómo asocie las piezas para sumar las longitudes.



$$\sqrt{2} + \left(1 + \sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{2} + 1\right) + \sqrt{3}$$

Conmutativa: $a + b = b + a$

Si cambia dos piezas de orden, la longitud no varía.



$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Propiedades de la multiplicación

Elemento unidad: 1

El área de la pieza de un 1 cm de altura coincide con la base.

$$A = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}\ \text{cm}^2$$

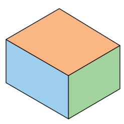
Elemento inverso: $a^{-1} = \frac{1}{a}$

El área de la pieza cuyos lados miden $\sqrt{2}$ cm y $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cm respectivamente es 1 cm^2.

$$A = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1\ \text{cm}^2$$

Asociativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

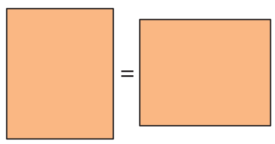
El volumen no depende de la cara cuya área se está calculando.



$$\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot 1\right) = \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}\right) \cdot 1$$

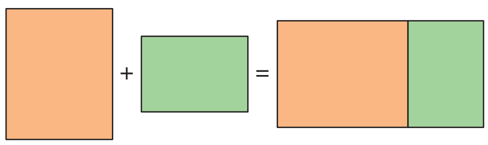
Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$

No importa la orientación de la pieza; el área no varía.



$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$$

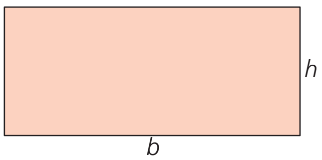
Además, si quiere calcular el área de dos piezas a la vez, lo puede hacer de dos maneras, aplicando la **propiedad distributiva:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$



$$\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot 1$$

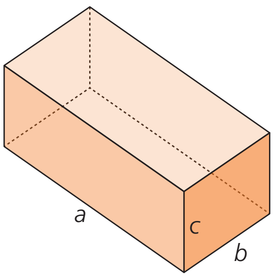
Recuerda

Área de un rectángulo



$$A = b \cdot h$$

Volumen de un ortoedro



$$V = a \cdot b \cdot c$$

Presta atención

El cero no tiene elemento inverso ya que ningún número multiplicado por cero da como resultado la unidad.

Actividades

31 **Halla el opuesto de cada uno de los siguientes números.**

a) $2+\sqrt{3}$

b) 0

c) $\dfrac{\pi}{6}$

d) $0{,}1\overset{\frown}{6}$

e) $-\dfrac{7}{18}$

f) $1-\sqrt{5}$

32 **Escribe los opuestos de $\sqrt{7}$ y $-\dfrac{31}{7}$ y represéntalos de forma exacta en la recta real. Después contesta.**

a) ¿Cuál de los dos números es menor en ambos casos?

b) ¿Qué distancia del cero separa a un número y a su opuesto?

c) ¿Qué distancia hay entre ellos?

33 **Analiza si un número real tiene siempre opuesto. ¿Y un número racional? ¿Hay algún conjunto numérico en el que un número no tenga opuesto? ¿Cuál?**

34 **Calcula el inverso de cada uno de los siguientes números:**

$-4{,}67 \qquad \sqrt{5} \qquad \dfrac{1}{3} \qquad -7 \qquad \dfrac{\pi}{4}$

35 **Considera cada uno de estos números:**

$-1{,}75 \qquad 0{,}0\overset{\frown}{45} \qquad -5 \qquad 0{,}\overset{\frown}{3}$

- Exprésalos como fracción y calcula su inverso. ¿Cambia el signo?
- Calcula la expresión decimal de los inversos.
- Representa gráficamente cada número y su inverso y compáralos con 1 y −1. ¿Qué observas?

36 **Considera los distintos conjuntos numéricos y busca el inverso de alguno de sus elementos, exceptuando el cero.**

a) Determina en qué casos el inverso pertenece al mismo conjunto y en cuáles no.

b) ¿Existe algún elemento que tenga inverso en todos los conjuntos numéricos? ¿Cuál es? ¿Cómo se llama?

c) ¿En qué conjuntos existe elemento inverso para todos los números?

37 **Recuerda y escribe en tu cuaderno cómo se determina la inversa de una fracción. ¿Encaja con la propiedad del elemento inverso?**

Presta atención

La propiedad distributiva permite sacar factor común en una expresión.

Propiedad distributiva →

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

← **Factor común**

Ejercicio resuelto

38 **Saca factor común y, después, calcula.**

a) $2\cdot\dfrac{3}{5}+2\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)+2-\dfrac{14}{5}$

b) $-\dfrac{3}{4}+\dfrac{21}{2}+\dfrac{9}{4}-\dfrac{15}{2}$

Solución

a) $2\cdot\dfrac{3}{5}+2\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)+2\cdot 1-2\cdot\dfrac{7}{5}=$

$=2\cdot\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{4}+1-\dfrac{7}{5}\right)=$

$=2\cdot\dfrac{(12-15+20-28)}{20}=2\cdot\dfrac{-11}{20}=-\dfrac{11}{10}$

b) $-\dfrac{3\cdot 1}{2\cdot 2}+\dfrac{3\cdot 7}{2\cdot 1}+\dfrac{3\cdot 3}{2\cdot 2}-\dfrac{3\cdot 5}{2\cdot 1}=$

$=\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}+7+\dfrac{3}{2}-5\right)=\dfrac{3}{2}\cdot 3=\dfrac{9}{2}$

39 **Opera respetando la jerarquía y sacando factor común. Discute la ventaja en cada caso.**

a) $55+77-22+11-33$

b) $\dfrac{2}{15}-\dfrac{8}{25}+\dfrac{14}{30}$

c) $6\pi-10\pi+45\pi-15\pi$

+ COMPETENTES SA

40 Aplica las propiedades de las operaciones con números reales para representar de forma exacta el número $\dfrac{\sqrt{13}}{2}+\dfrac{1}{2}$.

4 Aproximaciones y errores

Alberto calibra el cuentakilómetros de su bici a fin de medir de la forma más exacta posible la longitud de sus trayectos. Para ello, calcula la longitud de la rueda: $L = \pi \cdot d = \pi \cdot 0{,}692$ m $= 2{,}1739821...$ m

Pero no precisa tantos decimales, por eso elige una **aproximación.**

	Décimas	Centésimas	Milésimas	Diezmilésimas
Por defecto	2,1	2,17	2,173	2,1739
Por exceso	2,2	2,18	2,174	2,1740
Redondeo	2,2	2,17	**2,174**	2,1740

Alberto aproxima por redondeo con tres cifras decimales: $L \approx 2{,}174$ m

Este número tiene cuatro cifras significativas, tres exactas y una aproximada.

Las **cifras significativas** de un número aproximado son aquellas de cuya exactitud tenemos constancia y resultan relevantes para lo que se quiere medir.

Alberto quiere conocer qué error comete, esto es, la diferencia que hay entre el dato real y lo que marca el cuentakilómetros.

- Con este fin, calcula el **error absoluto** medido en metros:

  $$\text{Error absoluto} = |0{,}692\pi - 2{,}174| = 0{,}0000178... \text{ m}$$

  Como no puede determinar el error de forma exacta porque π es un número irracional, da una **cota** de ese valor: Error absoluto $< 0{,}0005$ m

- Alberto no conoce el valor real, así que calcula también una **cota del error relativo** dividiendo la cota del error absoluto entre la aproximación:

  $$\text{Error relativo} = \frac{E_a}{|x|} < \frac{0{,}0005}{2{,}174} = 0{,}00022999... < 0{,}0003$$

  El **error relativo** es menor que 0,03 %.

- El **error absoluto** es la diferencia entre el valor real, x, y el valor aproximado, a, de una medida, en valor absoluto: $E_a = |x - a|$

  Tiene las mismas unidades que la medida, y, si se desconoce el valor real, se da una **cota del error absoluto,** que suele ser menor que 5 unidades con respecto al lugar que sigue a la última cifra significativa utilizada.

- El **error relativo** es el cociente entre el error absoluto y el valor real:

  $$E_r = \frac{E_a}{|x|}$$

  Para hallar una **cota del error relativo,** se calcula el cociente entre la cota del error absoluto y la aproximación. Suele expresarse en porcentaje.

Lenguaje matemático

Para indicar que un número está aproximado, se utiliza el signo $\approx$.

$$\pi \approx 3{,}1416$$

Presta atención

Al redondear un número grande, por ejemplo 2 873, debemos tener en cuenta el número de cifras significativas:

- Con 1 cifra significativa: 3 000
- Con 2 cifras significativas: 2 900
- Con 3 cifras significativas: 2 870

Presta atención

El error relativo será menor cuanto mayor sea el número de cifras significativas utilizadas.

Ejercicio resuelto

41 **Halla una cota de los errores cometidos al aproximar a dm³ el volumen de una esfera de 1 m de radio.**

Solución

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4{,}189 \text{ m}^3 \qquad E_a = |x - a| < 0{,}0005 \text{ m}^3 \qquad E_r = \frac{E_a}{|x|} < \frac{0{,}0005}{4{,}189} = 0{,}0001193... < 0{,}0002 = 0{,}02\ \%$$

42 **Determina los errores absoluto y relativo cometidos al utilizar estas aproximaciones.**

a) $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$

b) $\sqrt{3} \approx 1{,}73$

c) $\pi \approx 3{,}14$

43 **Aproxima $\frac{15}{13}$ y $\sqrt{27}$ por defecto y por exceso con 1, 2 y 3 cifras decimales.**

a) Calcula el error absoluto cometido en cada caso.

b) Utiliza los resultados obtenidos para explicar el sentido de la aproximación por redondeo.

44 **Indica cómo expresarías las siguientes cantidades en una conversación informal. Señala el número de cifras significativas que utilizas y halla una cota del error absoluto y del error relativo que se comete.**

a) Presupuesto de asfaltado de una calle: 134 988,33 €

b) Precio de un coche: 16 685,37 €

c) Tamaño de un virus: 0,008375 mm

45 **Una vivienda cuenta con paneles solares para ser más sostenible. Observa estos datos de producción y aproxímalos a dos cifras significativas.**

Período	Producción
1.er mes	54,71 kWh
1.er año	692,55 kWh

Después, calcula una cota de los errores absoluto y relativo cometidos en cada caso, en euros.

Repite los cálculos para una aproximación con una cifra significativa, analiza los resultados y contesta:

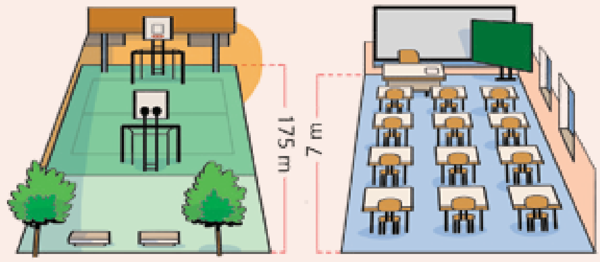
a) ¿Cómo son los errores en cada caso?

b) ¿Existe alguna relación entre el número de cifras significativas y el error relativo cometido?

46 **Lorena quiere hacer un viaje por España y ha apuntado en su libreta las distancias entre distintas ciudades. Determina la cota del error absoluto y relativo cometido al aproximar estas distancias.**

Trayecto	Distancia (km)
Huelva - Sevilla	90
A Coruña - Logroño	500
Cádiz - Girona	1 200

47 **Compara estas dos estimaciones.**

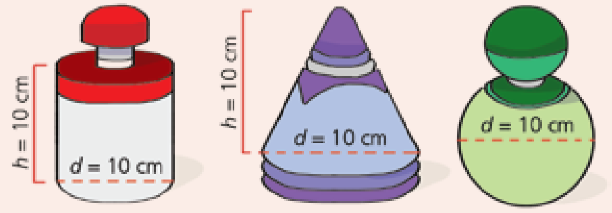


a) Indica el número de cifras significativas de cada una.

b) Da una cota del error absoluto cometido en las dos estimaciones. Comenta qué observas.

c) Calcula la cota del error relativo en cada caso. ¿Son igual de razonables ambas estimaciones?

48 **Observa estos envases y calcula el área y el volumen de cada uno de forma exacta y aproximada. ¿Cuántas cifras significativas utilizas? Acota los errores cometidos. Recuerda: 1 L = 1 dm^3**



A la vista de los resultados obtenidos, decide qué envase te parece mejor comparando superficie, capacidad, almacenaje, forma, estética...

+ COMPETENTES SA

49 **Recuerda cómo se construye la sucesión de Fibonacci y determina los 11 primeros términos.**

1. Escribe de forma indicada los cocientes entre dos términos consecutivos. ¿Qué tipo de números son?
2. ¿Qué tipo de número es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$? Aproxima su expresión decimal con cuatro cifras significativas.
3. Aproxima el valor de los 10 primeros cocientes hasta con cuatro cifras significativas y ve comparando el resultado con el del apartado anterior. ¿Qué observas?
4. Calcula una cota del error absoluto y relativo que se comete al aproximar el número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ por el último cociente que has calculado.

5 Intervalos

Lourdes ha recibido información sobre el precio del agua para uso doméstico.

Tramos	Tramos mensuales	Tarifas
Primer tramo	Menos de 10 m^3	0,2965 €/m^3
Segundo tramo	Desde 10 m^3 a menos de 16 m^3	0,5486 €/m^3
Tercer tramo	Desde 16 m^3 a menos de 18 m^3	0,6855 €/m^3
Cuarto tramo	A partir de 18 m^3	1,3163 €/m^3

Le corresponden 100 L por persona y día, esto es, menos de 10 m^3 al mes.

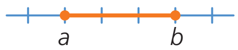
Pagará lo mínimo si mantiene un consumo razonable, inferior a 10 m^3. A partir de ahí, se tarifa por tramos. El primer tramo a partir de 10 m^3 incluye los consumos, x, que van de 10 m^3 a una cantidad que no llegue a los 16 m^3. Se trata de un **intervalo** y se escribe:

$[10, 16) = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leq x < 16\}$

Un **intervalo** es el conjunto de números reales comprendidos entre dos valores llamados **extremos** del intervalo.

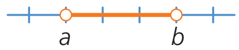
Dependiendo de si los extremos se consideran parte del intervalo o no, se definen cuatro tipos:

Intervalo cerrado



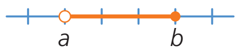
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$

Intervalo abierto



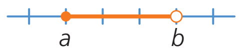
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$

Semiabierto por la izquierda



$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$

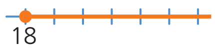
Semiabierto por la derecha



$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$

El último tramo de la tabla solo muestra un límite, a partir de 18 m^3. Cualquier consumo igual o superior a ese estará penalizado con el coste máximo. El tramo tiene extremo inicial, pero no final:

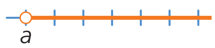
$[18, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 18\}$



También son intervalos:

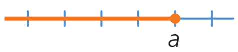
Números reales menores que a

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}/x < a\}$



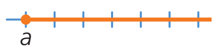
Números reales mayores que a

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}/x > a\}$



Números reales menores o iguales que a

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}/x \leq a\}$



Números reales mayores o iguales que a

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}/x \geq a\}$

Lenguaje matemático

Para indicar que un número está en un conjunto, se utiliza el símbolo $\in$.

$$3 \in (1, 7)$$

Se lee: *3 pertenece al intervalo (1, 7).*

Lenguaje matemático

La recta real también se puede expresar como intervalo:

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

De forma análoga:

$$\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$$

$$\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$$

Actividades

50 Representa mediante intervalos los conjuntos numéricos indicados. ¿De qué tipo son?

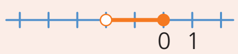
a) Números comprendidos entre -3 y 2, incluido el 2.

b) Números menores o iguales que -2.

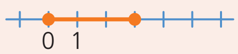
c) Números mayores que -3.

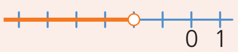
d) Números positivos menores que 5.

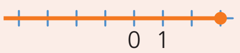
51 Escribe las desigualdades e indica los intervalos que representan estos conjuntos numéricos.

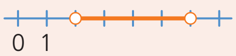
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

52 Representa gráficamente estos intervalos en la recta real atendiendo a sus extremos. Indica junto a cada uno la desigualdad correspondiente.

a) $[2, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 3)$

b) $(-5, -1]$ **d)** $[0, 7]$

53 Describe como intervalo y representa en la recta el conjunto de números que cumple cada una de estas desigualdades.

a) $\{x \in \mathbb{R} / -5 < x < 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} / x > x - 5\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 5\}$

54 Representa los números que verifican estas desigualdades y escribe los intervalos. ¿Qué observas?

a) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -3\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x\}$

55 Averigua y explica cuál es el intervalo al que pertenecen los números que verifican que:

a) $2x < 0$ **c)** $2 - x \geq 0$

b) $x - 3 > 0$ **d)** $0 < x + 1 \leq 2$

56 Tantea y averigua para qué números es posible calcular $\sqrt{x-2}$. Exprésalos como desigualdad, intervalo y represéntalos en la recta real.

Ejercicio resuelto

57 Representa el intervalo formado por los números, x, que verifican que: $|x - 3| < 2$

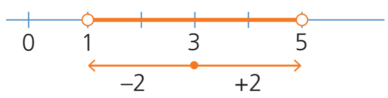
Solución

Un número cuya diferencia con 3 es exactamente 2 en valor absoluto es dos unidades mayor o dos unidades menor que 3.

$$5 - 3 = 2$$

$$1 - 3 = -2$$

La diferencia será menor que 2 si el número está entre 1 y 5.



$$\{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 5\} = (1, 5)$$

58 Representa los intervalos que cumplen las siguientes condiciones.

a) $|x - 4| < 3$ **c)** $|x - 6| \leq 1$

b) $|x + 1| < 5$ **d)** $|x + 3| \leq 7$

59 Escribe intervalos abiertos que comprendan $\sqrt{27}$ entre dos números enteros, con una cifra decimal y con dos cifras decimales.

- ¿Qué números empleas como extremos del intervalo?
- ¿Podrías conseguir intervalos aún más pequeños?

60 Busca intervalos como los de la actividad anterior para el número 2,1. ¿Es posible?

+ COMPETENTES SA

61 Escribe los intervalos abiertos formados por dos términos consecutivos de esta sucesión:

$$2,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}\ \dots\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\dots}}}}}$$

Indica a cuáles de esos intervalos pertenece el número $1+\sqrt{2}$. Explica lo que observes.

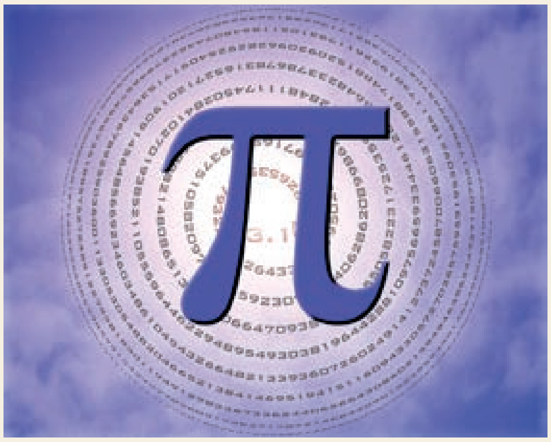
Buenas aproximaciones

¿Es 3,14 una buena aproximación de Pi?

Si preguntas el valor del número Pi a cualquier persona, habrá algunas que responderán que es 3,14. Sin embargo, como también muchas otras saben, no es cierto. Pi tiene infinitas cifras decimales no periódicas, no solo dos, es decir, es un número irracional. Pese a ello, para algunas cosas es muy útil poder aproximar irracionales, como Pi, mediante números racionales, con los cuales es más fácil trabajar. [...] Para aproximar Pi se suele emplear el número racional 3,14, es decir 157/50, pero, ¿es este un buen redondeo? ¿Cómo podemos afirmar, en general, que una aproximación racional lo es?

Un primer criterio es que sea cercana al valor del número irracional. Sin otro dato, podríamos decir que 3,1416 es una aproximación mejor que 3,14. Otro criterio, muchas veces contradictorio con lo anterior, es que sea una expresión sencilla. En ocasiones se dan ambas propiedades: por ejemplo, aunque las fracciones 157/50 y 22/7 son ambas aproximaciones de Pi, la segunda es más simple y además está más cerca del valor real de Pi: no hay duda de cuál escoger.

De forma general, al aproximar un número irracional mediante una fracción el "precio a pagar" es el tamaño del denominador y la "ganancia" es la "bondad" de la aproximación, es decir, el tamaño del error. El objetivo es optimizar las elecciones del denominador y el error. Podemos también establecer que estos dos valores estén relacionados entre ellos (por ejemplo el error puede ser inversamente proporcional al cuadrado del denominador escogido). Esto permite tener, al mismo tiempo, alta precisión y simplicidad en la representación. En 1837 el matemático Gustav Lejeune Dirichlet demostró que existen infinitas maneras distintas de aproximar los números irracionales con fracciones, admitiendo precisamente un término de error inversamente proporcional al cuadrado del denominador.



[...] ¿Cuál sería una buena aproximación del irracional más famoso de todos los tiempos? Aplicando el criterio de Dirichlet es fácil comprobar que 3,14 = 157/50 no es muy buen redondeo, por ejemplo, 22/7 es una aproximación mucho mejor. [...]

FUENTE: Ágata A. TIMÓN, Daniele CASAZZA
elpais.com, 21 de octubre de 2019

Analiza el texto

62 **Observa que en el texto dice: "Pi tiene infinitas cifras decimales no periódicas, no solo dos, es decir, es un número irracional." ¿Por qué un número con dos cifras decimales no es un número irracional?**

63 **Escribe todas las aproximaciones de π que aparecen en el texto.**

a) Razona qué aproximación es mejor: una aproximación mediante un número racional o mediante uno irracional.

b) Calcula el error que se comete según la aproximación escogida.

64 **Busca qué criterios debería cumplir una buena aproximación según el texto.**

a) Decide qué aproximación se ajusta mejor a cada criterio.

b) Explica por qué dice que $\frac{22}{7}$ es la mejor aproximación de π.

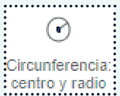
65 **Busca otras aproximaciones, racionales, de π indicando a quién se atribuyen y en qué año o siglo se encontraron. Razona si alguna de ellas es mejor que $\frac{22}{7}$ según estos criterios.**

Representación de números reales

Dibujar un segmento.

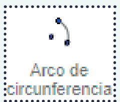
Dibujar la recta perpendicular que pasa por un punto.

Dibujar la recta paralela que pasa por un punto.



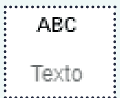
Dibujar una circunferencia conociendo su centro y su radio.

Dibujar una circunferencia conociendo su centro y un punto.



Dibujar un arco de circunferencia.

Hallar los puntos de intersección de dos figuras.



Crear un texto en la posición que elijamos de la vista gráfica.

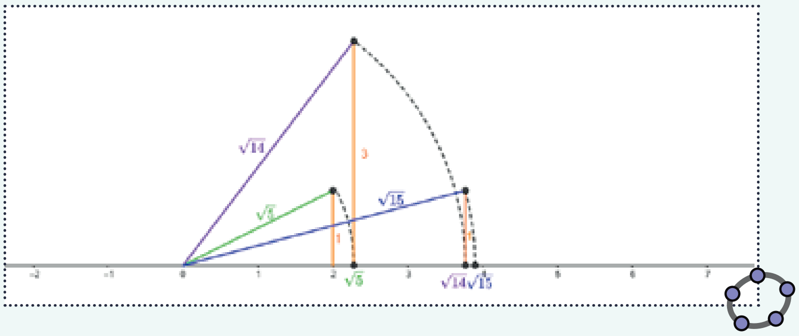
66 **Representa de forma exacta sobre la recta real usando el eje *X*:**

$$\frac{10}{7} \qquad \sqrt{2}$$

¿Qué número es mayor?

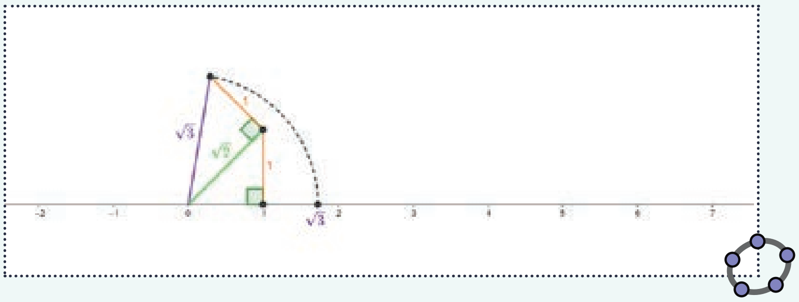
67 **Para representar un número irracional de la forma $\sqrt{n}$ aplicamos el teorema de Pitágoras. En esta unidad has representado números en un paso, como $\sqrt{2}$, y en dos pasos, como $\sqrt{6}$.**

Observa qué pasos se han seguido para representar $\sqrt{15}$:



- Escribe las expresiones del teorema utilizadas en esta representación.
- ¿Es posible representar de forma exacta $\sqrt{15}$ de otro modo? Explica cómo lo harías.
- Realiza dos representaciones distintas de $\sqrt{15}$ en GeoGebra y comprueba que obtienes el mismo punto.

68 **Analiza cómo se ha realizado la construcción de $\sqrt{3}$. ¿Qué número obtendrías a partir de la hipotenusa?**



a) Si iteras el procedimiento, ¿qué números obtendrías? ¿Son todos irracionales?

b) Realiza esta construcción en GeoGebra a partir de un segmento de longitud 1. Ajusta en Propiedades el redondeo a 10 cifras decimales y comprueba la longitud de cada segmento.

c) Busca el nombre de la construcción del apartado anterior y explica por qué crees que se llama así.

Actividades de síntesis

Números racionales e irracionales

69 **Determina la fracción generatriz de:**

$0,\widehat{1}$ $0,\widehat{2}$ $0,\widehat{3}$ $0,\widehat{4}$ ... $0,\widehat{8}$

a) Explica qué observas.

b) Conjetura cómo será la fracción generatriz de $1,\widehat{1}$; $2,\widehat{1}$; $3,\widehat{1}$ y compruébalo.

c) Estudia otros ejemplos similares modificando la parte entera o la cifra del período y generaliza.

70 **Explica cuáles de estos números se pueden expresar como una fracción y, cuando sea posible, determina la fracción generatriz correspondiente.**

a) $-73,12233344...$

b) $8,323232323...$

c) $219,505005000...$

d) $-13,474777...$

71 **Razona cuál de estos números no se puede expresar como una fracción. ¿Qué tipo de número es?**

$1,9191111...$ $34,231232233...$ $-2,08$ $\sqrt{\frac{25}{9}}$

72 **Elabora un esquema de llaves que muestre la estructura de los distintos conjuntos numéricos y sitúa estos números en el menor conjunto al que pertenezcan.**

$\sqrt{2}$ 0 $\frac{91}{7}$ $5,012013014...$ $-\frac{38}{13}$

73 **Escribe, si es posible, un número:**

a) entero que no sea natural.

b) entero no negativo y que no sea natural.

c) entero y racional a la vez.

d) racional no entero.

e) no racional.

74 **Halla las primeras cifras decimales del número $\sqrt{17}$. Encuentra dos números racionales que se diferencien de él menos de una centésima y que sean:**

a) exactos.

b) periódicos puros.

c) periódicos mixtos.

75 **Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.**

a) El cuadrado de un número irracional es irracional.

b) La suma de dos números irracionales es irracional.

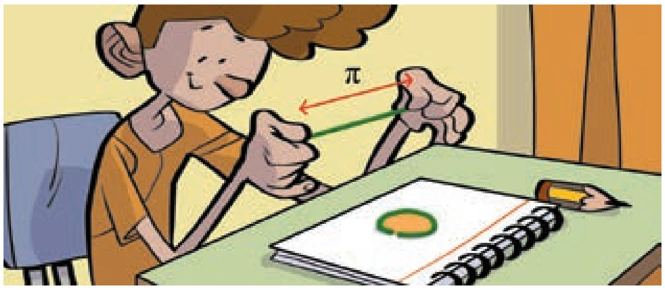
c) $7,\widehat{9}$ es un número natural.

d) La suma de un número entero y uno irracional es irracional.

e) 5,5555... es un número irracional.

76 **Calcula la longitud y el área que contiene una circunferencia cuyo radio vale:**

a) 10 cm b) 0,5 dm c) 0,25 dm d) $\frac{1}{3}$ m



¿Qué tipo de número son las longitudes de los radios? ¿Y las longitudes de las circunferencias? ¿Y las áreas? ¿Pasará esto siempre? Generaliza y completa la frase en tu cuaderno: *Si la longitud del radio de una circunferencia es un número racional, entonces...*

77 **Analiza si los siguientes números son racionales o irracionales y después contesta.**

a) Diagonal de un cuadrado de 2 cm de lado.

b) Diagonal de un cuadrado de $\sqrt{2}$ cm de lado.

c) Diagonal de un cuadrado de $\sqrt{3}$ cm de lado.

¿Pueden ser la longitud de la diagonal y la del lado de un cuadrado irracionales a la vez? ¿Y racionales?

Relaciones de orden. Representación

78 **Busca información sobre el número e. ¿Es racional o irracional? Represéntalo en la recta real y también π. ¿Es exacta la representación? ¿Cuál es mayor?**

79 **Compara estos números de dos maneras: sin calculadora y con calculadora. Explica cómo procedes en cada caso.**

a) $7,3\widehat{4}$ y $7,\widehat{34}$

b) $-\frac{5}{6}$ y $-\frac{21}{25}$

c) $-4,665646...$ y $-4,6\widehat{65}$

d) $3+\frac{1}{8}$ y π

80 Copia estos números en tu cuaderno en orden decreciente.

$$-6{,}32\widehat{45} \qquad -\sqrt{40} \qquad \frac{44}{7} \qquad \frac{19}{3} \qquad 6{,}33$$

81 Escribe para cada apartado un número racional y otro irracional comprendido entre los siguientes.

a) $2{,}\widehat{45}$ y $2{,}4\hat{5}$ **c)** $4{,}69$ y $\sqrt{22}$

b) $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$ **d)** π y $\dfrac{311}{99}$

¿Cuántos números reales diferentes podrías escribir en cada apartado? ¿Pasará eso siempre?

82 Representa estos números racionales en la recta real de forma exacta. ¿Qué teorema aplicas?

a) $\dfrac{3}{4}$ **b)** $\dfrac{2}{5}$ **c)** $\dfrac{5}{8}$ **d)** $\dfrac{7}{9}$

83 Observa estos números y piensa en qué intervalo de números enteros consecutivos se encuentran. Después, colócalos de forma exacta sobre la recta real.

a) $\dfrac{7}{4}$ **b)** $\dfrac{37}{5}$ **c)** $-\dfrac{8}{3}$ **d)** $-\dfrac{23}{6}$

84 ¿Qué resultado geométrico se utililiza para representar sobre la recta real las raíces cuadradas no exactas de números naturales? Sitúa paso a paso estos números.

a) $\sqrt{26}$ **b)** $\sqrt{40}$ **c)** $\sqrt{41}$ **d)** $\sqrt{32}$

85 Coloca de forma exacta los siguientes números sobre la recta real.

a) $\sqrt{6}$ **b)** $1+\sqrt{10}$ **c)** $-\sqrt{20}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

86 Ordena estos números ayudándote de su ubicación en la recta real.

$$\sqrt{3} \qquad \frac{7}{4} \qquad \frac{9}{5} \qquad \frac{\sqrt{13}}{2} \qquad \frac{12}{7} \qquad \frac{17}{9} \qquad \frac{\sqrt{5}}{2}$$

87 Representa gráficamente el número $\sqrt{18}$. Después haz lo mismo con el número $3\sqrt{2}$. Comprueba si ambos son iguales.

Propiedades de las operaciones

88 Calcula el opuesto y el inverso de cada uno de estos números reales. Indica el menor conjunto numérico al que pertenece cada uno.

a) $\sqrt{9}$ **b)** $-0{,}25$ **c)** $\dfrac{\pi}{6}$ **d)** -17

89 Observa cómo se simplifica esta fracción. Copia el proceso en tu cuaderno indicando qué propiedad utilizas en cada paso.

$$\frac{36}{40} = \frac{2^2 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 5} = \frac{2^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{2^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 5} = \frac{9}{10}$$

Aplica la estrategia y simplifica estas fracciones.

a) $\dfrac{75}{100}$ **b)** $\dfrac{96}{72}$ **c)** $\dfrac{105}{45}$ **d)** $\dfrac{90}{54}$

90 Explica cómo utilizar el factor común para simplificar estos cálculos y resuelve las operaciones.

a) $\dfrac{1}{5} \cdot 3 - \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{17}{2} + \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{5}$

b) $\dfrac{49}{6} + \dfrac{21}{4} - \dfrac{28}{3} + \dfrac{35}{2}$

c) $9 \cdot \sqrt{6} - 2 \cdot \sqrt{6} - 13 \cdot \sqrt{6} + 4 \cdot \sqrt{6}$

d) $35 \cdot \pi + 15 \cdot \pi - 40 \cdot \pi$

91 Indica en cada paso qué propiedades de las operaciones con números reales se han utilizado y qué resultados se buscan para operar de forma sencilla.

a) $-\sqrt{3} + 12 + \sqrt{3} = 0 + 12 = 12$

b) $4 \cdot \dfrac{5}{7} \cdot \dfrac{7}{4} = 5 \cdot \dfrac{7}{7} \cdot \dfrac{4}{4} = 5$

c) $13 \cdot \dfrac{5}{26} = 13 \cdot \dfrac{1}{13} \cdot \dfrac{5}{2} = 1 \cdot \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{2}$

d) $3\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 8\sqrt{7} = (3+5-8) \cdot \sqrt{7} = 0$

Aproximaciones y errores

92 ¿Es correcta la siguiente expresión? En caso negativo, corrígela.

$$\sqrt{2} - 1 = 0{,}4142135624$$

Indica a qué conjunto numérico pertenece.

93 ¿Crees que estas cantidades son reales o aproximadas? ¿Por qué? Analiza el error cometido en cada caso e indica cuál es menos relevante.

94 **Halla los errores absoluto y relativo cometidos en esta aproximación:** $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\approx 0{,}3+0{,}5=0{,}8$

95 **Una empresa moderniza su flota con vehículos propulsados con gas licuado, más económico y menos contaminante. Calcula cuánto costaría llenar un depósito con 75 litros a 0,667 €/L:**

- utilizando las tres cifras decimales y redondeando el precio final.
- redondeando el precio por litro y operando después.

Calcula el error cometido en los dos casos y analiza los resultados.

96 **Determina de forma exacta las longitudes de estas circunferencias. Calcula después ese mismo valor utilizando la aproximación** $\pi \approx \frac{22}{7}$.

a) $r=5$ cm **b)** $r=50$ m **c)** $r=500$ m

Determina el error absoluto y relativo cometido en cada caso. Analiza cómo varía cada error en cada apartado.

Intervalos

97 **Representa y escribe el intervalo y la desigualdad correspondientes.**

a) Números estrictamente menores que 11.

b) Números mayores que 7 y menores que 9, incluido el 9.

c) Números comprendidos entre -5 y $-\frac{5}{2}$.

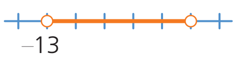
d) Números mayores o iguales que 0.

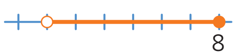
98 **Describe estos intervalos y semirrectas como desigualdades y represéntalos en la recta real. Indica de qué tipo de intervalo o semirrecta se trata.**

a) $[5, 12]$ **c)** $(2, 5]$

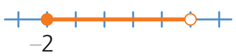
b) $(-\infty, 4]$ **d)** $(-3, +\infty)$

99 **Escribe los intervalos que están representados. ¿De qué tipo es cada uno?**

a) 

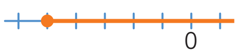
c) 

b) 

d) 

100 **Determina la desigualdad que expresa cada una de estos conjuntos numéricos y escríbelos en forma de intervalo.**

a) 

c) 

b) 

d) 

101 **Representa de forma exacta el intervalo comprendido entre los números** $-\frac{5}{3}$ **y** $-\sqrt{2}$.

102 **Demuestra gráficamente que** $\frac{11}{7}\in\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$.

103 **Indica si los conjuntos de números que cumplen las siguientes condiciones son intervalos abiertos o cerrados y exprésalos como tales.**

a) $\{x\in\mathbb{R}\,/\,3\le x\}$ **c)** $\{x\in\mathbb{R}\,/\,-23<x\le 17\}$

b) $\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\frac{2}{3}>x\right\}$ **d)** $\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,-\frac{3}{5}\le x\le\frac{1}{4}\right\}$

104 **Halla dos números racionales y dos irracionales que pertenezcan a cada uno de estos intervalos.**

a) $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$ **c)** $\left[\pi,\frac{22}{7}\right)$

b) $\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$ **d)** $\left(\frac{6}{11},\frac{7}{11}\right)$

¿Podrías encontrar más números? ¿Cuántos números reales hay en un intervalo cerrado cualquiera? ¿Y en uno abierto o semiabierto?

105 **Si se aproxima** $\sqrt{7}$ **a las décimas por defecto y por exceso, ¿es cierto que** $\sqrt{7}\in(2{,}6;2{,}7)$**?**

a) Representa la afirmación y consulta la definición de cota del error absoluto. ¿Qué relación hay?

b) En la definición se indica que *suele ser menor que…* ¿Por qué?

106 **Representa los intervalos formados por los números que verifican las siguientes condiciones.**

a) $|x-5|<\frac{1}{2}$ **c)** $|4x-14|\le 2$

b) $|x+4|\le 5$ **d)** $|2x+7|<1$

107 **Observa esta tabla elaborada para separar el melocotón por categorías según su tamaño.**

Diámetro en mm	Calibre
90 y más	AAAA
87 incluido 90 excluido	AAA
80 incluido 87 excluido	AA
73 incluido 80 excluido	A
61 incluido 73 excluido	B
56 incluido 61 excluido	C

a) ¿De qué tipo son los intervalos? Escríbelos.

b) ¿Pertenece cualquier producto a alguno de los intervalos? ¿Y a más de uno?

c) ¿Qué intervalo falta?

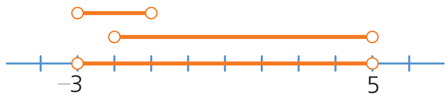
Operaciones con intervalos

Para resolver problemas numéricos a veces necesitaremos considerar números que pueden estar en un intervalo o en otro y otras veces necesitaremos saber qué números se hallan en dos intervalos a la vez.

Con objeto de representar estas situaciones, utilizamos las siguientes operaciones con intervalos.

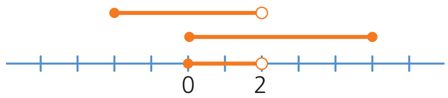
La **unión de intervalos**, $\cup$, indica que consideramos los números que están en un conjunto o en el otro.

$$(-3,\ -1) \cup (-2,\ 5) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -3 < x < -1 \text{ o } -2 < x < 5\} = (-3,\ 5)$$



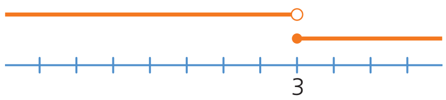
La **intersección de intervalos**, $\cap$, representa a los números que están en un conjunto y en otro a la vez.

$$[-2,\ 2) \cap [0,\ 5] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -2 \leq x < 2 \text{ y } 0 \leq x \leq 5\} = [0,\ 2)$$



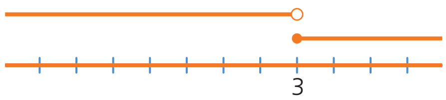
Si dos intervalos no tienen ningún elemento en común, decimos que su intersección es vacía. Se indica con el símbolo $\varnothing$.

$$(-\infty,\ 3) \cap [3,\ +\infty) = \varnothing$$



La unión de dos intervalos puede comprender toda la recta real.

$$(-\infty,\ 3) \cup [3,\ +\infty) = \mathbb{R}$$



108 Representa los dos intervalos en la misma recta. Observa el resultado y determina qué números comprende su unión expresando el resultado como un único intervalo, si es posible.

a) $[-1, 7]$ y $(5, 13]$

b) $(4, +\infty)$ y $(1, 5)$

109 Representa los dos intervalos en la misma recta. Fíjate bien en los extremos y escribe qué intervalo determina su intersección.

a) $(3, 6)$ y $(-2, 5]$

b) $(-\infty, 2)$ y $[-3, +\infty)$

110 Representa los números que cumplen cada una de las desigualdades en la misma recta real y determina el intervalo formado por los números que cumplen una u otra desigualdad. ¿Qué operación has realizado?

a) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 3\}$ o $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, -5 \leq x < 3\}$ o $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -1\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\}$ o $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > -3\}$

111 En la actividad anterior halla el intervalo formado por los números que cumplen ambas desigualdades a la vez para cada apartado. ¿De qué operación se trata?

112 Escribe como un único intervalo.

a) $(-6, 4) \cup [-3, 7]$

b) $(-\infty, 2] \cup (1, +\infty)$

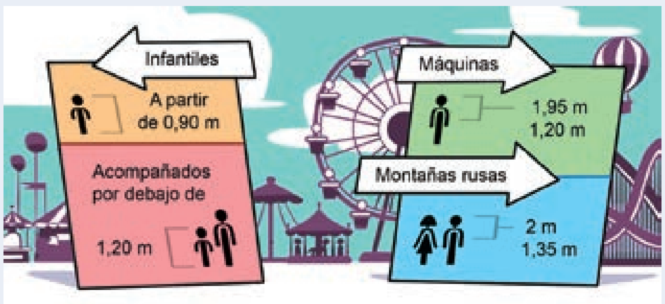
c) $[2, 12) \cup (3, 12]$

d) $(-6, 4) \cap [-3, 7]$

e) $(-\infty, 2] \cap (1, +\infty)$

f) $[2, 12) \cap (3, 12]$

113 En el parque de atracciones las restricciones para montar en ciertas atracciones son las que se describen a continuación.



a) Escribe como intervalos los requisitos de estatura que tiene cada atracción.

b) ¿Qué operación indica los niños que solo pueden montar acompañados en las atracciones infantiles?

c) Indica cómo se calcula quiénes pueden montar en todas las atracciones. ¿Qué intervalo es?

Conocimientos básicos

Ten en cuenta…

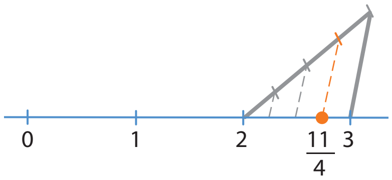
- Los **números racionales** se pueden representar en la recta utilizando el teorema de Tales.
- Los **números irracionales** de la forma $\sqrt{n}$ se pueden representar aplicando el teorema de Pitágoras una o varias veces.
- **Propiedades de las operaciones**
  - Conmutativa:
    $$a + b = b + a$$
    $$a \cdot b = b \cdot a$$
  - Asociativa:
    $$a + (b + c) = (a + b) + c$$
    $$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
  - Elemento neutro: 0
  - Elemento opuesto: $-a$
  - Elemento unidad: 1
  - Elemento inverso: $\frac{1}{a}$
  - Distributiva:
    $$a \cdot (b + c) = ab + ac$$
- **Error absoluto**
  $$E_a = |x - a|$$
  donde a es una aproximación del número x.
- **Error relativo**
  $$E_r = \frac{E_a}{|x|}$$
- **Intervalos**
  - Abierto: (a, b)
  - Cerrado: $[a, b]$
  - Semiabiertos:
    $[a, b)$ $(a, b]$

La recta real

Representa gráficamente los siguientes números reales.

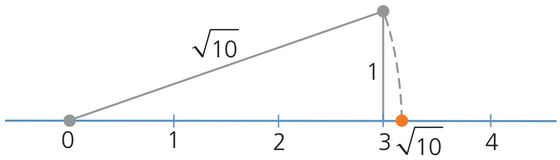
a) $\frac{11}{4}$

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} \rightarrow 2 < \frac{11}{4} < 3$$



b) $\sqrt{10}$

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}$$



Propiedades de las operaciones

Aplica las propiedades de las operaciones para simplificar y resolver.

a) $$\frac{9}{10} + \frac{12}{5} - \frac{15}{10} \underset{\text{Factor común}}{=} \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3}{2} + 4 - \frac{5}{2}\right) \underset{\text{Conmutativa}}{=} \frac{3}{5} \cdot \left(4 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) \underset{\text{Asociativa}}{=} \frac{3}{5} \cdot \left(4 - \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5}$$

b) $\pi \cdot \mathbf{5^2} + \pi \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{7} = \pi \cdot 5 \cdot (5 + 7) = \pi \cdot 5 \cdot 12 = 60\pi = 188{,}495\ldots$

Aproximaciones y errores

Determina una aproximación por redondeo de $\pi - 1$ con tres cifras significativas y calcula los errores absoluto y relativo. Determina una cota para estos errores.

$$\pi - 1 = 2{,}1415926535\ldots \approx 2{,}14$$

- $E_a = |2{,}14159\ldots - 2{,}14| = 0{,}00159\ldots$ Cota: $E_a < 0{,}005$
- $E_r = \frac{0{,}00159\ldots}{2{,}14159\ldots} = 0{,}00074\ldots = 0{,}074\ldots\ \%$

Cota: $E_r < \frac{0{,}005}{2{,}14} = 0{,}0023\ldots < 0{,}003 = 0{,}3\ \%$

Intervalos

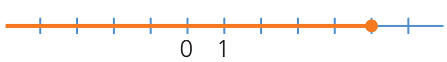
Escribe en forma de intervalos y como desigualdades.

a) 

$(-3,\ 5) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -3 < x < 5\}$

b) 

$[-3,\ 5) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -3 \leq x < 5\}$

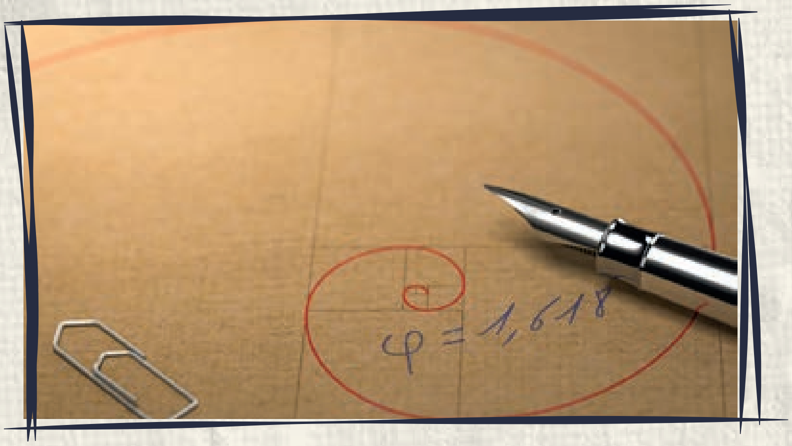
c) 

$(-\infty, 5] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 5\}$

Desarrollo de competencias

Los números metálicos Números irracionales

Ya lo reveló la escuela pitagórica: *todas las cosas son, en esencia, números.* Los números están en todas partes. La armonía de un objeto, una imagen o un elemento de la naturaleza se "cuantifica" con un número determinando la razón entre dos de sus medidas. Ya hemos visto en el texto de la entrada la importancia de estas razones en el arte. En particular, en el arte andalusí.



Los números están presentes en nuestro patrimonio cultural, no solo como contenido matemático, sino también en su expresión geométrica en figuras, en fachadas, en obras de arte y monumentos. Los números forman parte de nuestra cultura.

Entre todos ellos, llaman la atención los llamados números metálicos. Representan también proporciones, razones, y reflejan distintas formas.

Ahora, tú vas a buscar y enumerar cuáles son los números metálicos y descubrir qué forma se esconde detrás de cada uno con una construcción. Para ubicar su presencia real en nuestro entorno buscarás y analizarás un objeto, obra de arte, estructura natural... y el lugar dónde puedes encontrarlo.

1 Infórmate sobre los números metálicos.

a) Haz una búsqueda en Internet sobre estos números. Anota los que encuentres.

b) Escribe junto a cada uno cómo se define y su valor.

c) ¿Existe alguna característica que los relacione a todos? ¿Cuál?

d) Fue una matemática la encargada de ponerles nombre. Busca información sobre ella y el trabajo que realizó.

2 ¿Cuál fue el primer número metálico? Además de ser el primero es el más famoso de todos, compruébalo.

a) Escribe la proporción que lo define. ¿Qué otro nombre recibe?

b) Despeja de esta proporción el valor exacto de este número. ¿Es racional o irracional?

c) Busca y construye un rectángulo cuyas dimensiones cumplan la razón que refleja el número. ¿Cómo se llama?

d) Relaciona la construcción anterior con la representación de números irracionales en la recta real. ¿Encuentras alguna semejanza?

3 Busca referencias sobre la presencia de este número en objetos de tu vida cotidiana y en distintas disciplinas. Por ejemplo, puedes buscar en:

- pintura.
- arquitectura.
- naturaleza.
- otras que se te ocurran.

4 Elige un número metálico diferente al de las dos actividades anteriores y elabora un póster que contenga:

- una lista de los números metálicos con su expresión numérica y el rectángulo asociado a cada uno.
- la biografía de la matemática sobre la que has investigado.
- una descripción detallada de dos de los números metálicos.
- la construcción detallada, indicando los pasos con regla y compás o con la función que corresponda, de los rectángulos asociados a esos números.
- una recopilación de imágenes de obras de arte, objetos de la naturaleza, artículos... en los que se puedan observar esos números analizando su presencia.