UNIDAD 1

Teoría de conjuntos

Enfoques

Pelos, saludos y palomas

¿Hay en España dos personas que tengan exactamente el mismo número de pelos en la cabeza? Esta extraña pregunta, y otras más o menos curiosas, pueden responderse utilizando un resultado matemático que destaca por su extremada sencillez: **el principio del palomar.** [...]

Si consultamos el artículo de la Wikipedia dedicado al pelo, podemos encontrar una aproximación a la cantidad de pelos que un adulto tiene en la cabeza:

El pelo se distribuye en casi toda la superficie corporal, exceptuando las superficies palmoplantares, el ombligo y las mucosas. En un adulto el número aproximado de pelos es de unos cinco millones, repartiéndose en forma desigual a lo largo del cuerpo. ***En la cabeza hay alrededor de un millón, encontrándose entre 100 000 y 150 000 en el cuero cabelludo.***

Se entiende que ese millón cuenta los del cuero cabelludo, la barba, la nariz, etc. Con este dato, y teniendo en cuenta que, según el INE, a 1 de julio de 2016 España tenía 46 468 102 habitantes, ya podemos responder a nuestra pregunta. **Si tomamos esos más de 46 millones de habitantes como las palomas y todas las posibles cantidades de pelos, 1 millón, como palomares, tenemos que seguro que habrá al menos dos personas con la misma cantidad de pelos en su cabeza (al haber más palomas que palomares).** De hecho, estamos seguros de que podemos encontrar al menos 47 personas con la misma cantidad de pelos repartidos por su cabeza. Sencillo a la par que curioso.

Y ya que estamos con preguntas peculiares, vamos con otra. Imaginad que el próximo fin de semana asistís a una gran fiesta, y supongamos que os juntáis 5000 personas. Algunos de los asistentes os conoceréis entre vosotros y otros no, como es natural, y algunos conocerán a más gente que otros. Bien, pues **es seguro que habrá al menos dos asistentes a la fiesta que conocerán al mismo número de personas.** [...]

FUENTE: Miguel Ángel MORALES, elpais.com (11 de enero de 2017)

1. Investigad cuántos metros de venas o cuántas células hay en el cuerpo humano. Aplicad el mismo principio para saber cuánta gente se debe reunir para que se pueda afirmar con seguridad que hay al menos dos personas con el mismo número metros de venas o la misma cantidad de células.

2. ¿Os parece sencillo el principio que enuncia la noticia? Estableced un debate sobre distintos ámbitos en los que podrías aplicar el principio del palomar.

1 Conjuntos. Descripción y notación

Cuando vamos al supermercado en busca de los artículos que hemos anotado en la lista de la compra no necesitamos recorrerlo entero. Los artículos se disponen organizados en pasillos por **categorías.** Los pasillos contienen productos que tienen algo en común: lácteos, conservas vegetales, legumbres... Lo mismo ocurre si acudimos a una zapatería, a una biblioteca...

El ser humano lleva toda su existencia intentando comprender el mundo en el que vive clasificando lo que le rodea en categorías. Hay muy distintos ejemplos. En Biología los seres vivos se clasifican en cinco reinos atendiendo a ciertas características similares entre ellos. Y los textos literarios se dividen en géneros según la finalidad con la que fueron escritos: lírico, narrativo, épico... Hacemos colecciones de individuos u objetos que tienen algo, alguna característica, en común.

En matemáticas hacemos lo mismo. Clasificamos números, figuras geométricas, funciones... en categorías a las que llamamos **conjuntos.** Cada uno de los objetos que forman parte de un conjunto es un **elemento** del conjunto.

Presta atención

Una **categoría** es una clase que resulta de una clasificación de personas o cosas según un criterio o jerarquía

Nota histórica

George Cantor fue el primero en desarrollar la teoría de conjuntos. La utilizó para llegar a la sorprendente conclusión de que hay infinitos de distintos tamaños.

> Un **conjunto** es una colección de objetos que tienen algo en común.
>
> Cada uno de estos objetos que lo constituyen se denominan **elementos** del conjunto.

Para describir un conjunto podemos proceder de dos maneras.

- Por **comprensión:** enunciando la característica que identifica a los elementos del conjunto.

  $$S = \{\text{colores del arcoíris}\}$$

  Se lee: S es el conjunto formado por los colores del arcoíris.

- Por **extensión:** enumerando todos los elementos que constituyen el conjunto.

  $$S = \{\text{rojo, anaranjado, amarillo, verde, azul, añil, violeta}\}$$

Un conjunto tiene que estar bien definido. La descripción debe ser clara y precisa, sin ambigüedades. Si optamos por enumerar sus elementos, no importa el orden en que se escriben y cada elemento debe aparecer solo una vez.

> Los elementos de un conjunto deben estar bien descritos enunciando la característica que los identifica, **comprensión,** o enumerado los elementos que la constituyen, **extensión.**

Ejercicio resuelto

1 **Define correctamente, o corrige si es necesario, estos conjuntos:**

a) Por extensión el conjunto $A = \{\text{divisores de } 30\}$

b) Por comprensión el conjunto $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

c) Por extensión el conjunto $C = \{\text{resultados de un dado pares o primos}\} = \{2, 4, 6, 2, 3, 5\}$

Solución

a) $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

b) $B = \{\text{cuadrados de los diez primeros números naturales}\}$

c) El conjunto no está bien definido por extensión. No puede haber elementos repetidos. Debería ser:

$C = \{2, 4, 6, 3, 5\}$

Al describir dos conjuntos, puede que la característica que los identifica esté expresada de forma diferente o que sus elementos estén descritos en diferente orden pero si tienen los mismos elementos los conjuntos son **iguales.**

Por ejemplo, son iguales:

{resultados al lanzar un dado} {números de un dado}

{1, 2, 3, 4, 5, 6} {3, 1, 5, 6, 4, 2}

Dos conjuntos son **iguales** si contienen exactamente los mismos elementos.

Cuando hablamos de colecciones o categorías hacemos referencia a si un determinado objeto está o no en ella. Por ejemplo, el rojo es un color del arcoíris, pero el marrón no es un color del arcoíris. En lenguaje matemático hablamos de pertenencia a un conjunto y lo describimos así:

- El rojo es un color del arcoíris.
  Rojo pertenece al conjunto de colores del arcoíris. → rojo $\in S$
- El marrón no es un color del arcoíris.
  Marrón no pertenece al conjunto de colores del arcoíris. → marrón $\notin S$

Fíjate en el conjunto definido por:

D = {colores del arcoíris con seis letras}

¿Cuántos elementos eres capaz de encontrar que pertenezcan a este conjunto? Ninguno de los colores del arcoíris se escribe con solo seis letras. Por tanto, D no tiene ningún elemento. ¿Es un conjunto?

D, es el **conjunto vacío** porque no contiene ningún elemento y se denota por $\varnothing$.

{colores del arcoíris con seis letras} $= \varnothing$

No hay ningún elemento que pertenezca a $\varnothing$. El conjunto vacío es único ya que, si hubiera dos, tendrían exactamente los mismos elementos, ninguno, y los dos conjuntos serían iguales.

Si un elemento, a, está en un conjunto C, decimos que a **pertenece a** C, $a \in C$. En caso contrario, a **no pertenece a** C, $a \notin C$.

El conjunto que no tiene elementos se denomina **conjunto vacío,** $\varnothing$.

1.2. Cardinal de un conjunto

Una característica del conjunto formado por los colores del arcoíris es que tiene exactamente siete elementos. Ese es su **cardinal,** su número de elementos:

S = {colores del arcoíris} → $|S| = 7$

Observa estos otros conjuntos:

D = {días de la semana} → D = {lunes, martes miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

E = {letras del alfabeto español} → $E = \{a, b, c, d, ..., z\}$

F = {meses del año que empiezan por e} → F = {enero}

¿Cuál es su cardinal?

D tiene 7 elemento. → $|D| = 7$

E tiene 27 elemento. → $|E| = 27$

F tiene 1 elemento. → $|F| = 1$

Estos conjuntos tienen una cantidad limitada de elementos, podemos escribirlos todos. Decimos que M y E son **conjuntos finitos.**

Lenguaje matemático

S = {números primos y pares}

El conjunto S tiene un único elemento, el 2. Se escribe:

$S = \{2\}$ y $|S| = 1$

No es correcto escribir: $S = 2$

Presta atención

Si el conjunto vacío no contiene ningún elemento su cardinal es 0.

$|\varnothing| = 0$

Observa el siguiente conjunto: $P = \{\text{números pares}\} = \{2, 4, 6, ...\}$
¿Cuál es el cardinal de este conjunto?

Este conjunto tiene una cantidad ilimitada de elementos, es imposible enumerar todos los elementos del conjunto P. Sin embargo, sí es posible comenzar el listado, se comprende perfectamente cómo está construido el conjunto y cuáles son sus elementos aunque no sea posible escribirlos todos. No importa cuántos escribamos, siempre quedarán elementos por escribir. P es un **conjunto infinito.**

Otros conjuntos infinitos son:

$A = \{\text{puntos de una recta}\}$ $B = \{\text{números naturales que terminan en 0}\}$

Un **conjunto** es:

- **finito** si podemos escribir todos sus elementos.
- **infinito** si no importa cuántos elementos enumeremos, siempre quedan muchos más que no están en esa lista.

Si S es un conjunto finito, su **cardinal, $|S|$,** es el número de elementos que contiene.

Lenguaje matemático

Fíjate en la diferencia de significado de los tres puntos "..." en cada caso:

- $E = \{a, b, c, ..., z\}$
  Podríamos haber escrito todos los elementos, pero así ahorramos espacio.
- $P = \{2, 4, 6, ...\}$
  Los tres puntos están para sustituir a los infinitos elementos que no podríamos escribir.

1.3. Subconjuntos

A veces necesitamos escoger elementos de un determinado conjunto que tienen alguna característica en común y agruparlos. Por ejemplo, si analizamos los paralelogramos, de entre ellos se destacan aquellos que tienen todos sus ángulos iguales: rectángulos. Cualquier rectángulo es, además, un paralelogramo.

En este caso decimos que el conjunto de los rectángulos es un **subconjunto** de los paralelogramos, se tiene que: $\{\text{rectángulos}\} \subset \{\text{paralelogramos}\}$

Todos los rectángulos son paralelogramos, pero puede haber algún paralelogramo, como el rombo, que no sea un rectángulo. No son conjuntos iguales.

Supongamos ahora que tenemos el conjunto de los números primos, P, y el conjunto de los números impares, I. Por ejemplo, los números 3, 5, 11, ... pertenecen a P y también pertenecen a I. Sin embargo, el 2 pertenece a P, pero no pertenece a I. Luego P no es un subconjunto de I, $P \not\subset I$.

En muchas situaciones, para poder hablar correctamente de los elementos de un conjunto, necesitamos definir, o al menos conocer, cuál es el universo dentro del que nos movemos, el **conjunto universal** o **universo, E,** en el que están los objetos que consideramos.

Por ejemplo, si estamos jugando a un juego de mesa con un dado y hablamos de los resultados que podemos obtener, el conjunto universal es:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Si necesitamos conseguir un número par pensamos en el subconjunto:

$P = \{2, 4, 6\}$

porque estamos hablando de los resultados de un dado. El 8 es un número par, pero no está en el universo con el que estamos trabajando.

Todos los conjuntos con los que trabajaríamos en este caso son subconjuntos del conjunto universal E.

Presta atención

Cualquier conjunto S se puede considerar subconjunto de sí mismo.

$$S \subset S$$

El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto S.

$$\varnothing \subset S$$

El **conjunto universal** o **universo, E,** es el formado por todos los elementos en un contexto dado.

Si todos los elementos de un conjunto S pertenecen a otro conjunto T, decimos que S es **subconjunto** de T, $S \subset T$.

Si al menos un elemento de S no está en T, S **no** es **subconjunto** de T, $S \not\subset T$.

Actividades

2 **Enumera todos los elementos de los siguientes conjuntos.**

$A = \{$enteros menores que 50 divisibles por 7$\}$

$B = \{$números impares entre 15 y 30$\}$

$C = \{$clases de paralelogramos$\}$

$D = \{$números positivos de dos cifras que suman 7$\}$

3 **Define estos conjuntos por comprensión dando una descripción de sus elementos.**

$A = \{11, 12, 13, 14\}$

$B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$

$C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

$D = \{$equilátero, isósceles, escaleno$\}$

4 **Dados los conjuntos:**

$A = \{$soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0\}$

$B = \{$números naturales tales que $x + 3 < 6\}$

Copia y completa estas expresiones escribiendo, con la notación adecuada, si estos elementos pertenecen o no al conjunto que se indica.

a) 2 ● A
b) 2 ● B
c) -1 ● A
d) -1 ● B
e) 3 ● A
f) 3 ● B

5 **Describe estos conjuntos por extensión, utilizando "..." cuando sea necesario.**

$A = \{$meses del año$\}$

$B = \{$números naturales múltiplos de 5$\}$

$C = \{$números impares capicúas de 3 cifras$\}$

$D = \{$números triangulares$\}$

Indica si estos conjuntos son finitos o infinitos.

6 **Escribe los elementos que puedas del conjunto:**

$A = \{$parejas de números solución de $2x + y = 3\}$

¿Es finito o infinito?

7 **Indica si entre los siguientes conjuntos hay algunos iguales.**

$A = \{1, 3, 2, 5\}$ $\quad C = \{1, 3, 1, 2, 5\}$

$B = \{2, 1, 4, 5\}$ $\quad D = \{1, 2, 3, 5\}$

8 **Decide si estos conjuntos son finitos o infinitos. Indica su cardinal cuando sea posible.**

$A = \{$elementos de la tabla periódica$\}$

$B = \{$números primos múltiplos de 5$\}$

$C = \{$tipos de polígonos regulares$\}$

$D = \{$números primos pares mayores que 7$\}$

9 **Sea S el conjunto de las fracciones irreducibles entre 0 y 1 con denominador de una sola cifra. Describe S y calcula $|S|$.**

10 **Los distintos tipos de números que manejamos están definidos de tal manera que los podemos tratar como conjuntos:**

$\mathbb{N}$ (números naturales) $\quad \mathbb{Z}$ (números enteros)

$\mathbb{Q}$ (números racionales) $\quad \mathbb{R}$ (números reales)

La definición de cada conjunto numérico permite determinar si un número está o no en él. Identifica a cuáles de los siguientes conjuntos numéricos pertenecen estos números. Si pertenecen a más de uno de ellos, indícalo.

a) -5
b) 3,1
c) $\frac{15}{4}$
d) $\sqrt{3}$
e) 25
f) $\frac{-12}{3}$

11 **Indica entre los distintos conjuntos numéricos de la actividad anterior si alguno de ellos está contenido dentro de otro.**

12 **Dados los conjuntos:**

a) $A = \{○\}$
b) $A = \{○, □\}$
c) $A = \{○, □, ✧\}$
d) $A = \{○, □, ✧, ¤\}$

Para cada apartado enumera todos los posibles subconjuntos. ¿Cuántos son?

El conjunto formado por todos los subconjuntos de otro, A, se denomina **partes del conjunto A, $P(A)$.** Reflexiona:

- ¿Cuál es el menor conjunto que pertenece a $P(A)$? ¿Y cuál es el mayor?
- Calcula $|A|$ y $|P(A)|$. ¿Existe alguna relación?

Investigación

13 **En la primera mitad del siglo XX los matemáticos se afanaron en estudiar y establecer los fundamentos de las matemáticas de forma clara y sin contradicciones. Y para ello avanzaron en la construcción de la teoría de conjuntos.**

Sin embargo, esta forma intuitiva de definir los conjuntos que hemos visto no cumple esa condición. Tiene contradicciones. Reflejo de una de ellas es la paradoja de Russell o paradoja del barbero:

En un pueblo hay un barbero que afeita a todos los que no se afeitan a sí mismos y solo a ellos. ¿Quién afeita al barbero?

a) Define el conjunto de las personas a las que afeita el barbero.

b) ¿Pertenece el barbero a este conjunto?

2 Diagramas de Venn. Operaciones con conjuntos

2.1. Diagramas de Venn

Ruth y Alberto juegan a adivinar palabras. Alberto piensa una palabra de cinco letras no repetidas y Ruth intenta adivinarla. Cada vez que Ruth dice una palabra, si no acierta, Alberto le dice qué letras de su palabra sí están en la solución.

Para elegir palabras seleccionan letras del alfabeto español, ese es el conjunto universal:

$E = \{$letras del alfabeto español$\}$

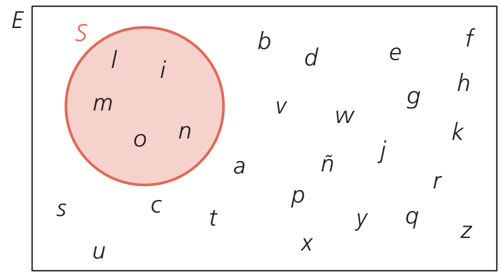
Alberto ha elegido la palabra *limón* que está formada por cinco elementos de E. El conjunto solución es:

$S = \{$letras que están en la palabra limón$\} \rightarrow S = \{i, l, m, n, o\}$

Y Ruth para adivinar la palabra propone *canto*. El conjunto de la jugada de Ruth es:
$J = \{$letras que están en la palabra canto$\} \rightarrow J = \{a, c, n, t, o\}$

Ahora, Alberto le dice a Ruth qué letras de su palabra no son válidas. ¿Podemos organizar estos conjuntos de alguna manera que sea más visual?

En general, cuando trabajamos con conjuntos, el conjunto universal se representa con un rectángulo en el que incluimos todos los elementos del espacio. Luego, cualquier conjunto con el que trabajemos dentro de este universo, se representa rodeando sus elementos con una curva cerrada.



Si un elemento pertenece al conjunto se representa dentro de la línea curva, si no pertenece a él, se representa fuera. Observa en el gráfico que el elemento $n \in S$ y, sin embargo, $c \notin S$.

Esta forma de representar los conjuntos se conoce como **diagramas de Venn.**

Nota histórica

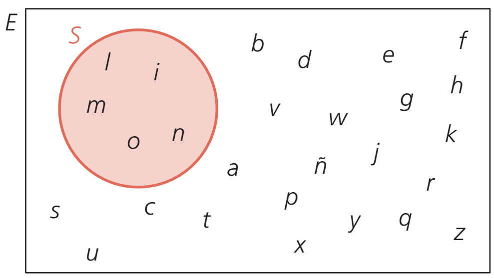
El matemático y lógico británico John Venn (1834–1923) ideó una forma de representación gráfica para trabajar con proposiciones lógicas y silogismos que posteriormente se ha aplicado para la representación visual de conjuntos y sus operaciones.

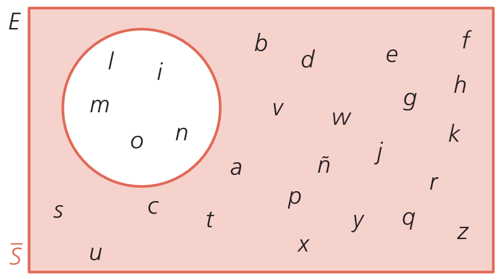
En su honor los conocemos como *diagramas de Venn*.

2.2. Operaciones con conjuntos

Al representar el conjunto solución dividimos el espacio en dos conjuntos: las letras que pertenecen a la solución y las que no:

$S = \{$letras que están en limón$\}$ $\qquad$ $\overline{S} = \{$letras que no están en limón$\}$





El conjunto formado por las letras que **no pertenecen a** S es el conjunto **complementario** de S, $\overline{S}$.

El **complementario** de un conjunto A es otro conjunto, $\overline{A}$, que contiene a todos los elementos del conjunto universal E que no están en A.

Presta atención

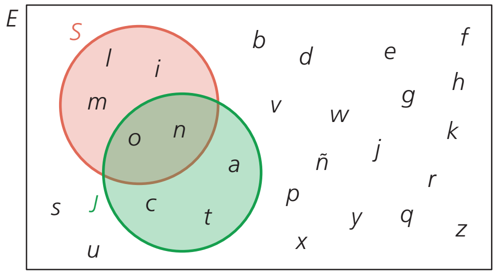
El complementario del conjunto vacío es el conjunto universal y el complementario del conjunto universal es el conjunto vacío.

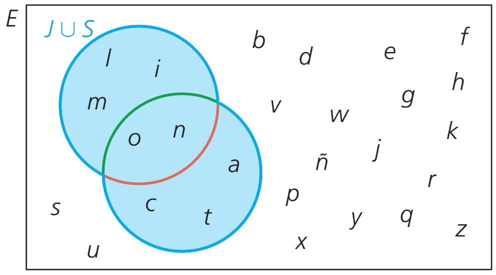
$\overline{\varnothing} = E$ y $\overline{E} = \varnothing$

Cuando Ruth hace una propuesta, Alberto tiene que revisar dos conjuntos, las letras de la solución y también las de la palabra que ha dicho Ruth.

$S = \{\text{letras que están en limón}\}$ $\qquad$ $J = \{\text{letras que están en canto}\}$

Los elementos con que trabaja Alberto son las letras que están en J o en S.





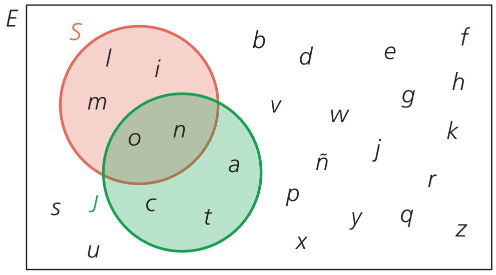
El conjunto formado por todos los elementos que están en J o en S es la **unión** de ***J* y *S*,** $J \cup S$.

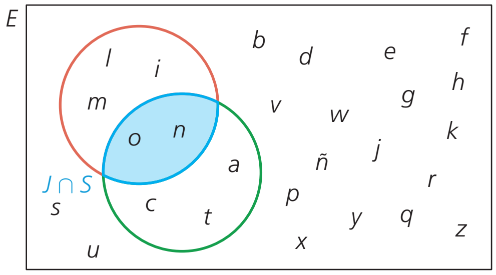
Dados dos conjuntos cualesquiera A y B se considera la **unión** de A y B, $A \cup B$, el conjunto de todos los elementos del conjunto universal que **pertenecen a *A* o a *B*.**

Presta atención

La unión de conjuntos comprende los elementos que pertenecen a uno, a otro y también a los dos.

Para saber si ha acertado Ruth, Alberto tiene que ver qué letras de la palabra que ha dicho coinciden con la solución. Alberto tiene que ver qué elementos tienen en común los conjuntos J y S.





El conjunto formado por los elementos que pertenecen a J y S a la vez es la **intersección** de ***J* y *S*,** $J \cap S$.

Dados dos conjuntos cualesquiera A y B se considera la **intersección** de A y B, $A \cap B$, el conjunto de todos los elementos que **pertenecen a *A* y *B* a la vez.**

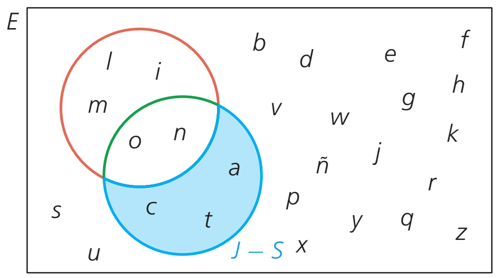
Ruth ha acertado dos letras de la solución, la *n* y la *o*. Todas las demás sabe que no valen. ¿Cuántas letras puede descartar?

Descarta todas las letras de la palabra, J, que no están en la solución, S. Al conjunto J le quita las letras que también están en la solución. Es lógico pensar que a un conjunto no le podemos quitar lo que no está en él, solo se *restan* los elementos que tienen en común:

$J - S = J - (S \cap J) = \{a, c, n, t, o\} - \{n, o\}$

Los elementos de J que no están en S es el conjunto **diferencia,** $J - S$.

La diferencia de estos conjuntos también se puede hallar con la intersección $J \cap \overline{S}$.



Dados dos conjuntos cualesquiera A y B se considera la **diferencia** $A - B$ el conjunto formado por los elementos de A que no están en B, $A \cap \overline{B}$.

Lenguaje matemático

Observa la relación entre las operaciones con conjuntos y las siguientes expresiones:

- complementario → *no*
- intersección → *y*
- unión → *o*

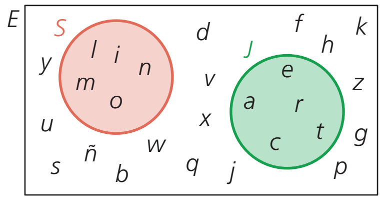
¿Y si no hubiera acertado ninguna letra? Tenía que acertar la palabra *limón*. Si hubiera dicho *recta*, ¿cuál sería la intersección?

$S = \{i, l, m, n, o\}$

$S \cap J = \varnothing$

$J = \{a, c, e, r, t\}$

Ningún elemento pertenece a los dos conjuntos a la vez, la intersección es $\varnothing$.

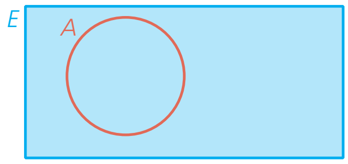


Dos **conjuntos** A y B tales que $A \cap B = \varnothing$ son **disjuntos.**

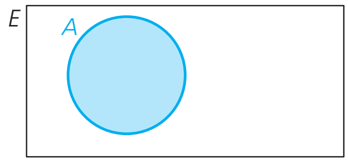
2.3. Propiedades de las operaciones con conjuntos

Al trabajar con diagramas de Venn y las operaciones con conjuntos, podemos demostrar ciertas igualdades entre sus operaciones.

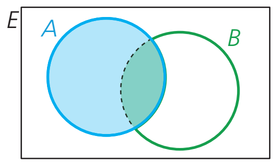
$A \cup E = E$



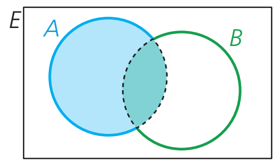
$A \cap E = A$



$A \cup (A \cap B) = A$



$A \cap (A \cup B) = A$

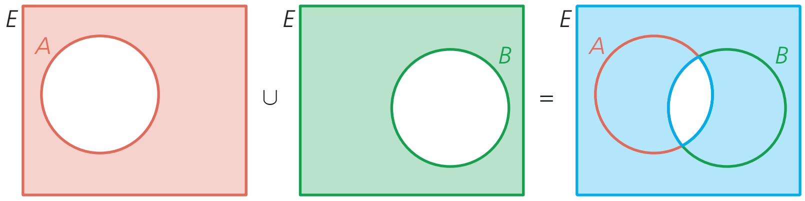


Nota histórica

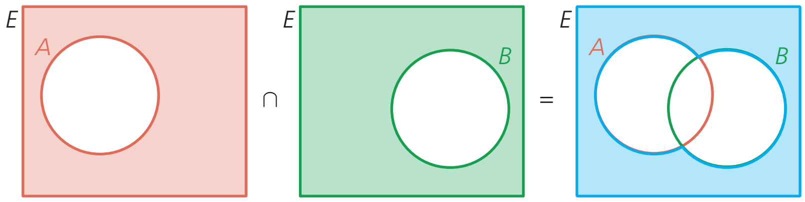
Augustus De Morgan (1806–1871) fue un matemático y lógico británico nacido en la India conocido por formular las leyes que llevan su nombre y por establecer el procedimiento de demostración por inducción matemática.

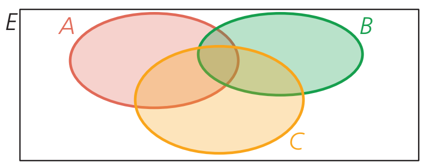
Leyes de De Morgan

$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$



$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$





Si necesitamos utilizar **tres conjuntos,** la forma de representarlos y de escribir las operaciones entre ellos es la misma. Solo tenemos que prestar atención al uso de paréntesis.

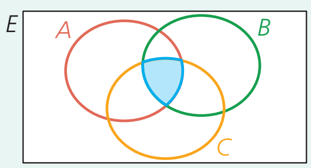
Ejercicio resuelto

14 Dibuja un diagrama de Venn en cada caso y sombrea el conjunto que se indica.

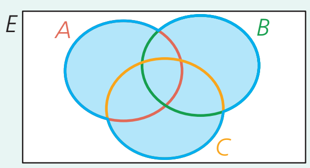
a) $A \cap B \cap C$ **b)** $A \cup B \cup C$ **c)** $A \cup (B \cap C)$

Solución

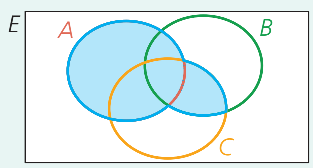
a)



b)



c)



Actividades

15 **A partir del conjunto universal E formado por los números del 1 al 20, dibuja diagramas de Venn que representen los conjuntos:**

$A = \{\text{números pares}\}$

$B = \{\text{múltiplos de } 4\}$

¿Qué relación existe entre A y B?

16 **Dentro del conjunto formado por todos los días de la semana, describe y representa utilizando diagramas de Venn:**

a) dos conjuntos A y B que sean disjuntos.

b) dos conjuntos C y D tales que $C - D$.

c) el complementario de A.

d) $C - D$.

e) $D - C$.

17 **Considera el conjunto universal formado por los quince primeros números naturales y los sucesos:**

$A = \{\text{números pares menores que quince}\}$

$B = \{\text{números impares menores que quince}\}$

$C = \{\text{números primos menores que quince}\}$

Representa utilizando diagramas de Venn que muestren los elementos de:

a) el conjunto universal, A y B.

- ¿Existe alguna relación entre A y B?
- Escríbela utilizando la notación adecuada.

b) el conjunto universal, B y C.

c) Cada uno de los siguientes conjuntos en una copia del diagrama del apartado anterior. (Una por cada conjunto).

- $B \cup C$
- $B \cap C$
- $B - C$
- $C - B$

18 **Si tomamos el conjunto universal formado por los meses del año y los conjuntos:**

$A = \{\text{meses que contienen una } a\}$

$B = \{\text{meses que contienen una } r\}$

Describe los siguientes conjuntos utilizando A, B y la operación adecuada:

a) $C = \{\text{meses que contienen una } a \text{ o una } r\}$

b) $D = \{\text{meses que contienen una } a \text{ y una } r\}$

c) $F = \{\text{meses que no contienen una } a\}$

d) $G = \{\text{meses que contienen una } a\text{, pero no una } r\}$

e) $H = \{\text{meses que no contienen una } a\text{, ni una } r\}$

Para cada apartado, traza un diagrama de Venn que muestre los conjuntos anteriores.

19 **Averigua, para cualquiera que sea el conjunto A, cuáles son los conjuntos $A \cup \varnothing$ y $A \cap \varnothing$.**

20 **Enumera los elementos de estos conjuntos dentro de los números naturales:**

$A = \{\text{números impares menores que } 20\}$

$B = \{\text{números primos menores que } 20\}$

$C = \{\text{cuadrados perfectos de números menores que } 20\}$

y describe los siguientes conjuntos.

a) $A \cup B \cup C$

b) $A \cap B \cap C$

c) $(A \cap B) \cup C$

d) $A \cap (B \cup C)$

e) $(A \cup B) \cap C$

f) $A \cup (B \cap C)$

Ejercicio resuelto

21 **Distribuye en un diagrama de Venn los elementos de estos conjuntos para calcular los cardinales que se piden.**

$A = \{\text{días de la semana que contienen la } s\}$

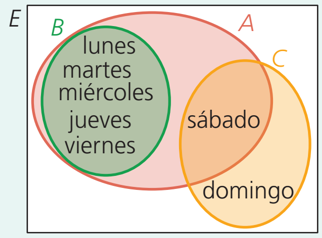
$B = \{\text{días de la semana que contienen } e\}$

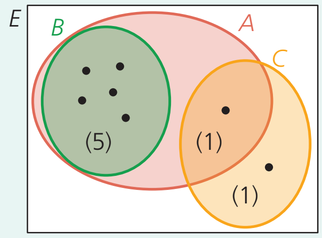
$C = \{\text{días de la semana que contienen } o\}$

a) $|A|$ **b)** $|A \cap B|$ **c)** $|B \cap C|$

Solución

Si solo queremos conocer el cardinal, para simplificar el diagrama podemos representar los elementos como puntos dentro de la curva correspondiente:





Así:

a) $|A| = 6$ **b)** $|A \cap B| = 1$ **c)** $|B \cap C| = 0$

22 **Calcula el cardinal de los conjuntos C, D, F y G de la actividad 18 utilizando un diagrama similar al del ejercicio resuelto.**

23 **Utiliza diagramas de Venn para demostrar la siguiente igualdad:**

$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

Desafío matemático

24 **Utiliza los diagramas de Venn para demostrar estas igualdades.**

a) $A - B = A \cap \overline{B}$

b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

c) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

3 Cálculo del cardinal de un conjunto finito

Hay muchas ocasiones en las que lo que nos interesa saber de un conjunto es su cardinal, cuántos elementos tiene. Vamos a ver algunos resultados para contar de forma sencilla y eficiente los elementos de un conjunto finito.

Principio de comparación

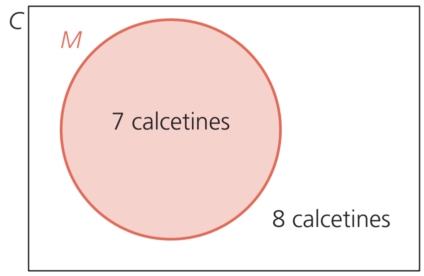
Susana se prepara para ir de viaje. Para hacer la maleta mete la mano en el cajón de los calcetines y echa unos cuantos en la maleta. En el cajón tenía 15 pares de calcetines. ¿Qué sabes la cantidad de calcetines que se lleva?

Sabemos que el conjunto $C = \{\text{calcetines en el cajón}\}$ tiene $|C| = 15$. Y que todos los calcetines que echa en la maleta son de ese cajón. Así que el conjunto $M = \{\text{calcetines que lleva en la maleta}\}$ es subconjunto de C, $M \subset C$.

Por tanto, el número de calcetines en la maleta no puede ser superior a 15:

$|M| \leq |C| = 15$

Al llegar, cuenta cuántos calcetines lleva en la maleta y averigua que $|M| = 7$. ¿Es posible saber cuántos calcetines quedaron en el cajón? ¿Cuál es el cardinal del conjunto diferencia?



Como todos los elementos de M pertenecen a C el número de elementos que quedan en $C - M$ es la diferencia entre el cardinal de M y el de C.

$|C - M| = |C| - |M| = 15 - 7 = 8$

Para dos conjuntos A y B finitos y tales que $B \subset A$ se cumple que:

- $|B| \leq |A|$
- $|A - B| = |A| - |B|$

Presta atención

En ocasiones es más fácil contar los elementos del complementario de un conjunto, y después hallar la diferencia con el cardinal del conjunto universal:

$|A| = |E| - |\overline{A}|$

Esta estrategia se conoce como paso al complementario.

Principio de adición

Para llegar a su destino, Susana ha consultado una web de viajes y ha visto que puede desplazarse en tren, T, autobús, A, o avión, V. Para el día que tiene planeado salir encuentra, según horarios, las siguientes posibilidades:

$T = \{\text{itinerarios en tren}\} \rightarrow |T| = 2$

$A = \{\text{itinerarios en autobús}\} \rightarrow |A| = 3$

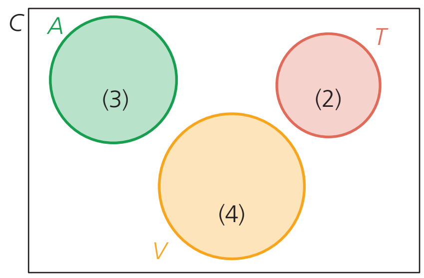
$V = \{\text{itinerarios en avión}\} \rightarrow |V| = 4$

¿De cuántas formas distintas puede viajar Susana a su destino? ¿Cuál es el cardinal del conjunto $O = \{\text{opciones de transporte}\}$?

Como Susana tiene que elegir solo una opción y estas son excluyentes, no puede ir en tren y avión a la vez, el número de posibilidades total es la suma de todas ellas:

$|O| = |T \cup A \cup V| = |T| + |A| + |V| = 2 + 3 + 4 = 9$

Tiene 9 formas distintas de llegar a su destino.



Si el recuento del número de elementos de un conjunto se descompone en la unión de subconjuntos A_1, A_2, A_n disjuntos dos a dos, el número de elementos del conjunto es la suma de los elementos de los subconjuntos.

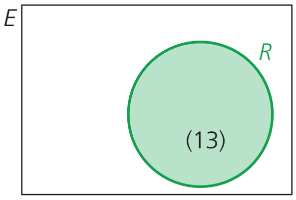
$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n|$$

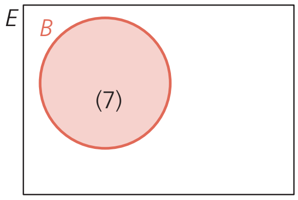
Principio de inclusión–exclusión

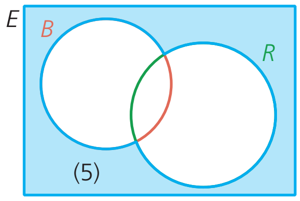
Una vez en el destino, Susana se une a un grupo de 21 personas al que se proponen dos actividades, rafting y descenso de barrancos. El número de personas que se han apuntado a cada actividad se ha expuesto en un tablón.

$R = \{\text{personas apuntadas a rafting}\} \rightarrow |R| = 13$

$B = \{\text{personas apuntadas a descenso de barrancos}\} \rightarrow |B| = 7$

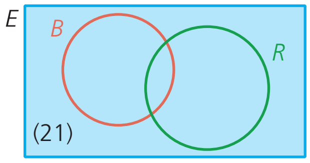






Si se sabe que hay 5 personas que no se han apuntado a nada, ¿cuántas hay apuntadas a alguna actividad?

Como el número de personas que no se han apuntado a nada es un subconjunto del grupo total, podemos restar sus cardinales y averiguar el número de personas apuntadas a alguna actividad.



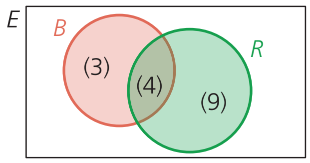
$|B \cup R| = 21 - 5 = 16$

Sin embargo, si aplica el principio de adición, se obtiene que las personas que están apuntadas a rafting o a descenso de barranco es:

$|B| + |R| = 7 + 13 = 20 \neq |B \cup R|$

Las cuentas no salen. ¿Cómo puede ser?

Susana indaga un poco y descubre que hay 4 personas se han apuntado a las dos actividades. Las cuentas no cuadraban porque estas personas se habían contado dos veces. Si las restamos del total obtenemos el resultado.



$|B \cup R| = |B| + |R| - |B \cap R| = 7 + 13 - 4 = 16$

El cardinal de la unión de dos conjuntos no disjuntos se calcula:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Si extendemos esta propiedad a la unión de tres conjuntos, A, B y C:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Presta atención

Si los conjuntos son disjuntos el cardinal de la unión se calcula aplicando el principio de adición.

$|A \cup B| = |A| + |B|$

ya que entonces $A \cap B = \varnothing$ y $|A \cap B| = 0$.

Ejercicio resuelto

25 **En la clase de Arturo 15 alumnos practican fútbol, 7 practican baloncesto y 11 atletismo. Son 3 los que practican fútbol y baloncesto, 2 baloncesto y atletismo y 4 los que practican fútbol y atletismo. Además, una chica practica los tres. ¿Cuántos alumnos hay en la clase de Arturo que practican algún deporte?**

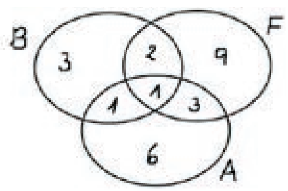
Solución

21mg0b101

Podemos aplicar el principio de inclusión-exclusión y así:

$|A \cup B \cup F| = |A| + |B| + |F| - |A \cap B| - |A \cap F| - |B \cap F| + |A \cap B \cap F| =$

$= 11 + 7 + 15 - 3 - 2 - 4 + 1 = 25$



En clase de Arturo hay 25 alumnos que practican algún deporte.

Principio de multiplicación

Al llegar al destino, Susana observa que el folleto con las actividades que se ofertan muestra distintas opciones de rafting y descenso de barrancos.

$R = \{\text{ofertas de rafting}\} = \{r_1, r_2\} \rightarrow |R| = 2$

$B = \{\text{ofertas de barrancos}\} = \{b_1, b_2, b_3\} \rightarrow |B| = 3$

Susana tiene que elegir un elemento de R y otro de B. Por ejemplo, puede elegir la oferta r_1 de rafting y la b_3 de barrancos, (r_1, b_3) ¿De cuántas formas diferentes puede elegir estas dos actividades?

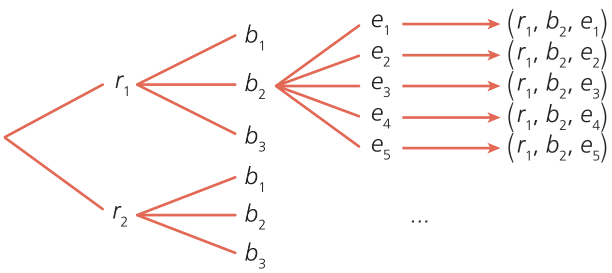
Hay 2 ofertas distintas para hacer rafting y por cada una de ellas, 3 para descenso.

$|R| \cdot |B| = 2 \cdot 3 = 6 \rightarrow$ 6 formas diferentes de elegir estas dos actividades.

Lenguaje matemático

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los pares de elementos (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$.

El cardinal de un conjunto formado por los pares de elementos (a_1, a_2), en los que el primer elemento pertenece al conjunto A_1 y el segundo elemento al conjunto A_2, se calcula multiplicando el cardinal de los dos conjuntos.



Antes de comenzar las actividades le ofrecen la posibilidad de hacer escalada y la acepta. Esta actividad tiene también diferentes opciones.

$E = \{\text{ofertas de escalada}\} = \{e_1, e_2, ..., e_5\} \rightarrow |E| = 5$

Por cada una de las 6 opciones de hacer las dos actividades iniciales tiene ahora 5 de hacer escaldada.

$|R| \cdot |B| \cdot |E| = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \rightarrow$ 30 formas diferentes de elegir las tres actividades.

Principio del palomar

Para hacer una encuesta de satisfacción sobre el viaje la empresa quiere seleccionar a dos personas que hayan realizado la misma actividad y comparar sus opiniones. ¿A cuántas personas deben seleccionar para garantizar que en el grupo hay al menos dos que han realizado la misma actividad?

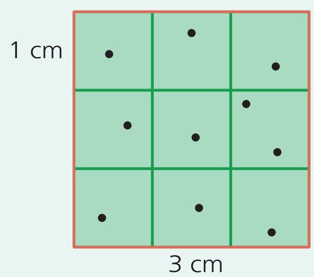
Como hay cuatro actividades distintas en total, si elegimos una, dos, tres o hasta cuatro personas, podría darse el caso de que cada una de ellas haya participado en una actividad diferente. Sin embargo, en el momento que elegimos la quinta persona, esta debe coincidir a la fuerza con alguna de las anteriores.

Este razonamiento se conoce como **principio del palomar** o **principio de Dirichlet** y su enunciado clásico dice que: *En un palomar con más palomas que nidos podemos asegurar que hay al menos dos palomas que ocupan el mismo nido.*

Si se distribuyen m objetos en n cajas y $m > n$ entonces alguna caja contiene al menos dos objetos.

Ejercicio resuelto

26 **En un cuadrado de 3 cm de lado se pintan, al azar, 10 puntos de color. Demuestra que hay al menos 2 puntos que se pueden tapar con un cuadrado de 1 cm².**



Solución

Para simplificar el razonamiento podemos dividir el cuadrado en cuadrados menores de 1 cm² trazando dos rectas paralelas a cada uno de los lados del cuadrado mayor.

Como queremos pintar 10 puntos de color podemos garantizar que hay, al menos, dos puntos que caen en el mismo centímetro cuadrado.

Actividades

27 **Martina tiene una bolsa con 15 caramelos de fresa y 7 de limón. Aplica el principio de comparación para indicar si son ciertas las siguientes afirmaciones.**

a) He sacado 8 caramelos de limón.

b) He sacado varios caramelos de fresa y quedan en la bolsa 8 caramelos de fresa.

c) He sacado 8 caramelos.

d) He sacado 20 caramelos.

28 **¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener si se lanzan una moneda o un dado? Explica tu respuesta utilizando conjuntos.**

S: 8

29 **Los participantes en un concurso pueden elegir entre responder a una pregunta de ámbito científico o de ámbito socio-lingüístico.**

Categorías	
Científico	Socio-lingüístico
Matemáticas, Biología, Geología, Física, Química	Lengua Castellana, Literatura, Historia, Geografía, Filosofía, Artes plásticas, Cine

a) Describe cuáles son los conjuntos que se utilizan.

b) ¿Qué operación entre ellos refleja el conjunto de todas las opciones posibles?

c) ¿Cuántas categorías hay? Indica el principio que utilizas para calcularlas.

S: 12

30 **En una nueva versión del concurso de la actividad anterior los participantes tienen que elegir una pregunta del ámbito científico y otra pregunta del socio-lingüístico. ¿Cuál es el número total de opciones posibles? Indica cómo representas el conjunto de todas las opciones.**

S: 42

31 **Un restaurante con menú saludable ofrece cuatro primeros platos, tres segundos platos y cuatro postres sin azúcar. El restaurante ofrece dos tipos de menú:**

- El completo que tiene un primero, un segundo y un postre.
- El medio que tiene un primero o segundo, y un postre.

a) ¿Cuántos menús completos diferentes se pueden pedir?

b) ¿Y cuántos medios menús diferentes se pueden pedir?

S: a) 48 b) 28

32 Roberto lanza 10 monedas y cuenta el número de caras obtenidas.

a) ¿Cuál es el cardinal del conjunto de resultados posibles?

b) ¿Cuál es el número de resultados en los que se obtiene al menos una cara?

S: a) $2^{10} = 16$ b) 1023

33 **Entre las personas que se han sometido a una encuesta hay 25 que escuchan un podcast sobre cine, 38 que escuchan otro sobre ciencia, y 19 que escuchan uno de fútbol. Hay 13 personas que escuchan cine y ciencia, 7 que escuchan ciencia y fútbol y 10 que escuchan cine y fútbol. Solo 4 escuchan los tres *pódcast* y hay 11 personas que no escuchan ninguno.**

a) Utiliza diagramas de Venn para representar la situación.

b) ¿Cuántas personas escuchan al menos un podcast?

c) ¿Cuántas personas se entrevistaron?

S: b) 56 c) 67

34 **¿Cuántos números menores que 100 no son divisibles por los divisores de 100?**

S: 40

35 **Comprobar que en una fiesta de 20 estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria hay al menos dos que tienen la misma edad.**

36 **La suma de las edades de ocho amigos es 140 años. Comprueba que es posible escoger a cuatro cuyas edades no sumen menos de 70 años.**

37 **Diez personas se han repartido 60 monedas de un euro. Justifica que hay al menos una pareja con el mismo número de monedas.**

Investigación

38 **Existe otro segundo enunciado del *principio del palomar* que afirma que:**

Si $a \cdot m + 1$ palomas ocupan m nidos hay al menos un nido con $a + 1$ palomas.

Busca un ejemplo que ilustre y explique este enunciado.

Ejercicios resueltos

Conjuntos. Descripción y notación

39 **Describe los siguientes conjuntos e indica si son finitos o infinitos. Para los finitos además escribe su cardinal.**

a) $A = \{\text{poliedros regulares}\}$ **b)** $B = \{\text{múltiplos de 5 menores que 100}\}$ **c)** $C = \{\text{potencias de 2}\}$

Solución

Debemos enumerar todos los elementos que pertenecen al conjunto sabiendo que cada elemento es único, que solo puede aparecer una vez y que los elementos del conjunto no están ordenados.

a) $A = \{\text{tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro}\} \rightarrow$ Es un conjunto finito: $|P| = 5$

b) $B = \{5, 10, 15, 20, 25, ..., 90, 95\} \rightarrow$ Es un conjunto finito: $|M| = 19$

c) $C = \{2, 4, 8, 16...\} \rightarrow$ Es un conjunto infinito.

Ahora tú

40 **Describe por extensión estos conjuntos. Calcula su cardinal cuando sea posible.**

a) $A = \{\text{fracciones unitarias}\}$ **b)** $B = \{\text{meses del año}\}$ **c)** $C = \{\text{días de la semana}\}$

41 **En clase de geometría están trabajando con un tipo de cuadriláteros, los paralelogramos. Indica:**

a) el conjunto universal.

b) el conjunto $P = \{\text{paralelogramos}\}$.

c) un elemento que pertenezca a P y otro que no.

d) un subconjunto de P.

Solución

a) $E = \{\text{cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, trapecio, trapezoide}\}$

b) $P = \{\text{cuadrado, rectángulo, rombo, romboide}\}$

c) cuadrado $\in P$, trapezoide $\notin P$.

d) $A = \{\text{cuadrado, rectángulo}\}$, $A \subset P$, porque todos los elementos de A pertenecen también a P.

Ahora tú

42 **Dado el conjunto $R = \{\text{mayo, junio, julio, agosto}\}$. Determina:**

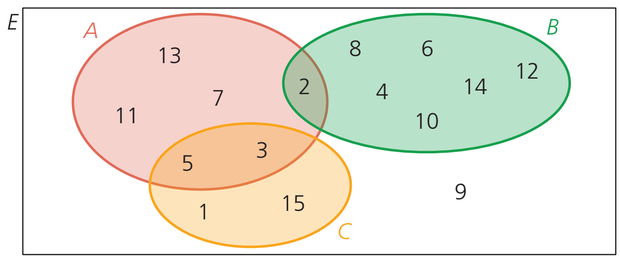
a) el conjunto universal.

b) un subconjunto de R cuyo cardinal sea 3.

43 **En el universo $E = \{\text{números naturales menores o iguales que 15}\}$, representa con diagramas de Venn:**

a) $A = \{\text{primos}\}$ **b)** $B = \{\text{pares}\}$ **c)** $C = \{\text{divisores de 15}\}$

Solución



Ahora tú

44 **En el universo del ejercicio resuelto anterior, representa mediante diagramas de Venn:**

a) $A = \{\text{divisores de 12}\}$ **b)** $B = \{\text{múltiplos de 5}\}$ **c)** $C = \{\text{múltiplos de 6}\}$

Operaciones con conjuntos

45 En el universo E = {números naturales menores o iguales que 10}, considera los conjuntos:

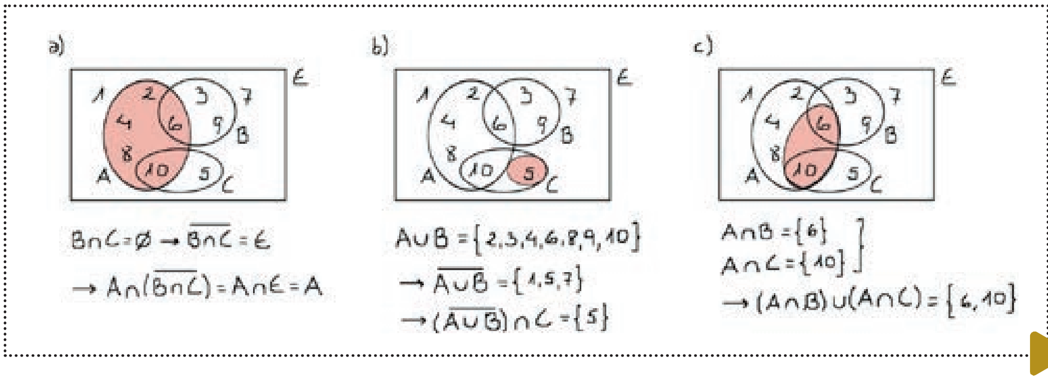
A = {múltiplos de 2} B = {múltiplos de 3} C = {múltiplos de 5}

Determina y representa:

a) $A \cap \left(\overline{B \cap C}\right)$ **b)** $\left(\overline{A \cup B}\right) \cap C$ **c)** $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Solución

21mg0b102



Ahora tú

46 Dados los conjuntos A = {pares}, B = {impares} y C = {primos} en el universo de los números menores que 12, escribe y representa los conjuntos:

a) $A \cup C$ **b)** $\overline{B}$ **c)** $(B \cup A) \cap C$ **d)** $\overline{B \cap C}$

Cálculo del cardinal de un conjunto finito

47 En una escuela de arte hay 30 alumnos. Se han matriculado 8 en Fotografía, 15 en Pintura y 12 en Escultura. Hay 10 alumnos que cursan Pintura y Escultura, 3 que estudian Escultura y Fotografía, pero no hay ningún alumno que curse Fotografía y Pintura.

a) ¿Cuántos alumnos cursan alguna de las tres materias?

b) Demuestra que en cualquier grupo de 4 alumnos de entre los que están matriculados en alguna de estas materias, hay al menos dos que cursan la misma.

Solución

a) Como no hay alumnos que cursen Fotografía y Pintura a la vez, ninguno estudia las tres materias, y:

$|F \cup E \cup P| = |F| + |E| + |P| - |F \cap E| - |F \cap P| - |E \cap P| + |F \cap E \cap P| = 8 + 12 + 15 - 3 - 0 - 10 + 0 = 22$

b) Si de entre los 22 alumnos que están matriculados en una de estas tres materias elegimos cuatro alumnos, según el criterio del palomar, podría ser que hubiera uno en cada una de ellas, pero el cuarto tiene que coincidir con alguno de los anteriores.

Ahora tú

48 En una oficina con 20 trabajadores, hay 16 que hablan inglés, 7 que hablan francés y 8 que hablan chino. Hay una persona que no habla ninguno de los tres idiomas y una que habla los tres. Además, 5 personas hablan inglés y francés, 2 hablan francés y chino, y 6 hablan inglés y chino.

a) ¿Cuántas personas hablan al menos un idioma?

b) ¿Cuántas personas como mínimo debe tener un equipo para que haya al menos una de cada idioma?

Actividades de síntesis

Conjuntos. Descripción y notación

49 **Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas aplicando la teoría adecuada. Corrige las que sean falsas.**

a) El conjunto D = {resultados obtenidos al lanzar un dado} es:

$D = \{1, 2, 3, 4, 4, 5, 6\}$

b) Los conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{6, 2, 4, 8\}$ son iguales.

S: a) Falsa b) Verdadera

50 **Considera el conjunto:**

S = {polígonos regulares}

Escribe en tu cuaderno si estos elementos pertenecen o no a S utilizando la notación adecuada.

a) Cuadrado
b) Triángulo isósceles
c) Pentágono
d) Triángulo equilátero
e) Circunferencia
f) Hexágono regular

51 **Describe estos conjuntos por extensión, utilizando "..." si es necesario.**

A = {años del siglo XX}

B = {tipos de triángulos}

$C = \left\{ \text{fracciones equivalentes a } \dfrac{1}{3} \right\}$

D = {divisores de 36}

¿Son conjuntos finitos o infinitos? Calcula su cardinal cuando sea posible.

52 **Enumera los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos y, si es posible, indica el valor de su cardinal.**

A = {números naturales, x, que cumplan $-3 < x \leq 6$}

B = {números enteros, x, tales que $-3 < x \leq 6$}

C = {números racionales, x, tales que $-3 < x \leq 6$}

53 **¿Cuál de estos conjuntos es el universal para los otros cuatro?**

A = {números pares}

B = {números primos}

C = {números enteros}

D = {números negativos}

F = {números naturales}

54 **Indica si el conjunto $S = \{1, 3\}$ es subconjunto de alguno de los siguientes conjuntos.**

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$
b) $B = \{1, 2, 4\}$
c) $C = \{2, 3\}$
d) $D = \{1, 3\}$

55 **Considera el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ y escribe:**

a) todos los subconjuntos de A con 3 elementos.

b) todos los subconjuntos de A con 3 elementos que contengan el elemento d.

c) todos los subconjuntos de A que no contengan el elemento d.

d) cuántos subconjuntos tiene A en total.

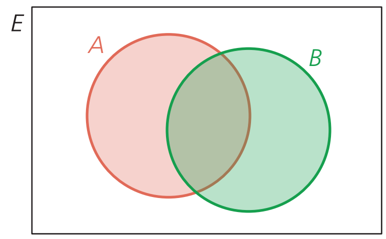
S: d) 2^4

Operaciones con conjuntos

56 **Utiliza los diagramas de Venn para representar las relaciones entre los distintos conjuntos numéricos que conoces: naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.**

57 **Copia este diagrama de Venn y sombrea en cada caso la región adecuada.**

a) $\overline{A}$
b) $A \cup B$
c) $\overline{A \cap B}$
e) $A - \overline{B}$
d) $A \cup \overline{B}$
f) $A \cap \overline{A}$



58 **Dentro del conjunto de los días de la semana considera los conjuntos:**

A = {días que contienen la r}

B = {días que contienen la o}

Enumera los elementos de cada uno y represéntalos en un diagrama de Venn. ¿Cómo son los conjuntos A y B?

A continuación, sombrea la región que corresponde a los siguientes conjuntos.

a) $\overline{A}$
b) $\overline{B}$
c) $\overline{A} \cap B$
d) $\overline{A} \cap \overline{B}$
e) $\overline{A} \cup \overline{B}$
f) $\overline{\left(\overline{A} \cap B\right)}$

59 **Toma como conjunto universal los números naturales menores o iguales que 20 y representa en un diagrama de Venn los siguientes conjuntos:**

A = {múltiplos de 6}

B = {múltiplos de 4}

Utiliza diagramas de Venn para representar las operaciones con conjuntos indicadas en estos apartados y analiza el motivo por el que hay resultados iguales.

a) $\overline{A} \cap \overline{B}$
b) $\overline{A} \cup \overline{B}$
c) $\left(\overline{A \cap B}\right)$
d) $\left(\overline{A \cup B}\right)$

60 Considera dentro del conjunto universal $E = \{$números de una cifra$\}$ los siguientes conjuntos:

$A = \{1, 3, 6, 9\}$

$B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$

Determina:

a) $A \cup B$ **d)** $\overline{A \cup B}$

b) $A \cap B$ **e)** $\overline{A} \cup \overline{B}$

c) $\overline{A}$ **f)** $A \cap \overline{B}$

61 En el conjunto universal formado por los números del 1 al 12 se consideran lo siguientes conjuntos:

$A = \{$múltiplos de 3 que no sean impares$\}$

$B = \{$números impares$\}$

$C = \{$múltiplos de 3$\}$

Utiliza las operaciones de conjuntos para expresar A a partir de B y C.

62 Utiliza el vocabulario adecuado para justificar si un conjunto y su complementario son disjuntos o no.

63 Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\overline{\varnothing}$ **d)** $A \cap \overline{A}$

b) $\overline{\left(\overline{E}\right)}$ **e)** $B \cap (A \cup B)$

c) $A \cup \overline{A}$ **f)** $(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$

Cálculo del cardinal de un conjunto finito

64 ¿De cuántas formas distintas puede ir al centro escolar un alumno si dispone de tres líneas distintas de autobús, una de tren y una de metro? Razona tu respuesta.

S: 5

65 El conjunto A comprende todos los múltiplos de 3 menores que 100 y el conjunto B todos los múltiplos de 5 menores que 100.

a) ¿Cuál es el conjunto $A \cup B$?

b) ¿Cuál es su cardinal?

S: b) 47

66 Una caja contiene bolígrafos de dos colores: rojo y azul. Indica cuántos bolígrafos tenemos que coger de la caja, sin mirar, para garantizar que tenemos al menos dos bolígrafos del mismo color.

S: Tres

67 Una empresa de paquetería tiene 40 empleados. Entre ellos hay 23 que tienen carné de coche y 15 que tienen carné de moto. Hay 9 empleados que tienen ambos carnés.

Responde a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántos empleados solo tienen carné de moto?

b) ¿Cuántos empleados solo tienen carné de coche?

c) ¿Cuántos empleados no tienen ninguno de los dos carnés?

S: a) 6 b) 17 c) 8

68 ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener si se lanza un dado dos veces?

S: 36

69 Un almacén tiene 28 cajas de caramelos de fresa, naranja y limón. Todos los caramelos de una caja tienen el mismo sabor. Demuestra que entre estas cajas hay al menos 10 del mismo sabor.

70 Lorenzo ha diseñado una aplicación que ayuda al usuario a elegir y combinar la indumentaria que se puede poner una persona. Un usuario que ya ha introducido todas sus prendas de ropa tiene:

$F = \{$faldas$\} \rightarrow |F| = 5$

$V = \{$vestidos$\} \rightarrow |V| = 3$

$C = \{$chaquetas$\} \rightarrow |C| = 4$

a) ¿De cuántas formas distintas se puede vestir escogiendo falda o vestido?

b) ¿De cuántas formas distintas se puede vestir escogiendo falda o vestido y chaqueta?

71 Demuestra, utilizando los múltiplos de 2 y el principio de comparación, que el cardinal de los números primos hasta el 100 es menor que 50.

72 Aplica el principio del palomar para demostrar que cualquier número racional es, obligatoriamente, o un número entero, o un decimal exacto o un decimal periódico.

73 En un cuadrado de 1 m de lado se pintan 49 puntos repartidos por toda su superficie. Demuestra que al menos cuatro se pueden tapar con un cuadradito de 0,25 m de lado.

74 Una urna contiene bolas numeradas del 10 al 99. De la urna vamos extrayendo bolas al azar y para cada una sumamos el valor de sus cifras. ¿Cuántas bolas hay que extraer como mínimo para garantizar que hay al menos tres cuyas sumas coinciden?

Conocimientos básicos

Conjuntos

Un **conjunto,** A, es una colección de objetos llamados **elementos.**

Se puede expresar por:

- compresión: $A = \{\text{números impares menores que } 10\}$
- extensión: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

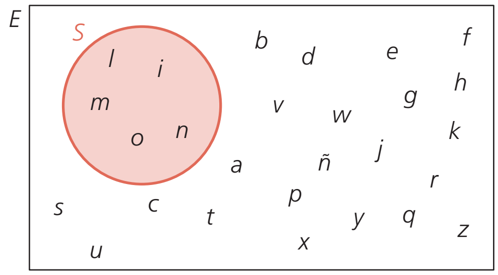
El número de elementos que contiene un conjunto es su **cardinal:** $|A| = 5$

Un elemento puede estar en un conjunto o no: $3 \in A$, $8 \notin A$

El **conjunto universal,** E, es el formado por todos los elementos en un contexto dado.

Si todos los elementos del conjunto, B, pertenecen también a otro conjunto A, se dice que B es **subconjunto** de A.

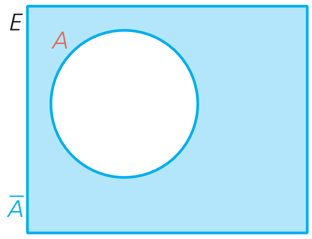
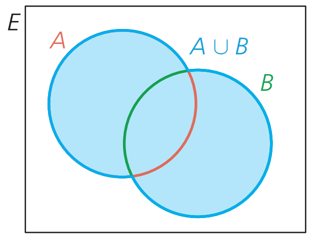
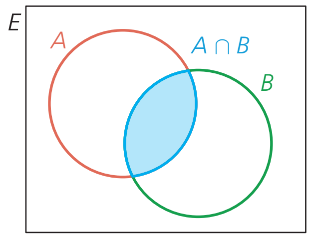
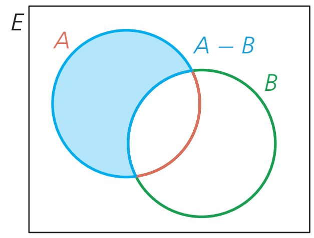
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{1, 9\}$; $1 \in B$ y $9 \in B \rightarrow A \subset B$



Operaciones con conjuntos

Se representa el conjunto universal con un rectángulo en el que incluimos todos los elementos del espacio y cualquier conjunto dentro de este universo, se representa rodeando sus elementos con una curva cerrada.

Si un elemento pertenece al conjunto se representa dentro de la línea curva, si no pertenece a él, se representa fuera.

Complementario	Unión	Intersección	Diferencia
$\overline{A}$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$
Elementos que no están en A	Elementos que están en A o en B	Elementos que están en A y en B.	Elementos que están en A pero no en B.
			

Dos **conjuntos** son **disjuntos** si $A \cap B = \varnothing$.

Cálculo del cardinal de un conjunto finito

Principio de comparación	Principio de adición	Principio de inclusión–exclusión
Para dos conjuntos A y B finitos y tales que $B \subset A$ se cumple que: • $\|B\| \leq \|A\|$ • $\|A - B\| = \|A\| - \|B\|$	Si el recuento del número de elementos de un conjunto se descompone en la unión de subconjuntos A_1, A_2, A_n disjuntos dos a dos, el número de elementos del conjunto es la suma de los elementos de los subconjuntos. $\|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n\| = \|A_1\| + ... + \|A_n\|$	El cardinal de la unión de dos conjuntos no disjuntos se calcula: $\|A \cup B\| = \|A\| + \|B\| - \|A \cap B\|$

Principio de multiplicación	Principio del palomar
El cardinal de un conjunto formado por los pares de elementos $\left(a_1, a_2\right)$ en los que el primer elemento pertenece al conjunto A_1 y el segundo elemento al conjunto A_2, se calcula multiplicando el cardinal de los dos conjuntos.	Si se distribuyen m objetos en n cajas y $m > n$, entonces alguna caja contiene al menos dos objetos.

1 Indica cuáles de los siguientes conjuntos es igual a $A = \{5, 8, 1, 3\}$.

a) $\{1, 2, 5, 8\}$ **b)** $\{1, 3, 5, 8\}$ **c)** $\{5, 8, 1, 3, 2\}$ **d)** $\{5, 8, 1, 3, 5\}$ **e)** $\{1, 3, 8\}$

2 Considera el conjunto $P = \{\text{paralelogramos}\}$. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(1) cuadrado $\in P$ (2) {cuadrado} $\in P$ (3) {cuadrado} $\subset P$

a) (1) es correcta
b) (2) es correcta
c) (3) es correcta
d) (1) y (3) son correctas
e) (1) y (3) son correctas

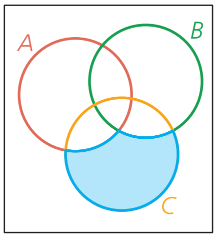
3 Determina el número de conjuntos S, que cumplen {○, □} ⊂ S ⊂ {○, □, ✧, ¤, ◊}

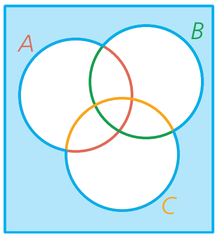
a) 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 9

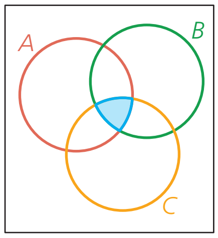
4 Dados los conjuntos A = {○, □, ✧} y B = {□, ¤} en el espacio universal E = {○, □, ✧, ¤, ◊}. Señala cuál de estas opciones no es correcta.

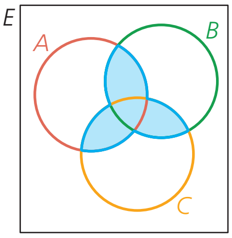
a) $A \cup B$ = {○, □, □, ✧, ¤}
b) $A \cap B$ = {□}
c) $\overline{A}$ = {¤, ◊}
d) $\overline{B}$ = {○, ✧, ◊}
e) $A - B$ = {○, ✧}

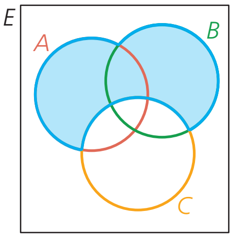
5 Marca la opción que representa $\overline{A \cup B} \cap C$.

a) E


b) E


c) E


d) E


e) E


6 De entre los 20 agricultores de una localidad 11 cultivan trigo, 6 cultivan centeno y 4 cultivan ambos cereales. ¿Cuántos agricultores no cultivan ninguno de los dos cereales?

a) 3 **b)** 7 **c)** 13 **d)** 17 **e)** No se sabe.

7 ¿Cuántos alumnos tiene que tener un grupo para que haya al menos tres que cumplan los años el mismo mes?

a) 13 **b)** 15 **c)** 25 **d)** 36 **e)** 39

8 El patio de butacas de un teatro tiene siete puertas de acceso. ¿De cuántas formas diferentes puede entrar y salir saliendo por una puerta distinta a la de entrada?

a) 49 **b)** 36 **c)** 42 **d)** 56 **e)** 35

Matemáticas en digital

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Varios alumnos están preparando una presentación sobre el reino animal en Biología. Para clasificar los animales definen distintos conjuntos atendiendo a su alimentación y reproducción.

A la hora de realizar la presentación deciden mostrar distintas familias de animales organizadas en diagramas de Venn para conseguir que sea mucho más visual.

Investiga aplicaciones que permitan realizar un diagrama de Venn y utilízala para realizar una presentación que muestre esa clasificación:

- Utilizad conjuntos para clasificar a los animales. Definid claramente y sin ambigüedades cada uno de ellos.
- Identificad si hay conjuntos disjuntos, subconjuntos... y qué información reflejan.
- Razonad en qué zona se deben colocar los animales que pertenezcan a más de una categoría y con qué operación entre conjuntos se corresponde.

Discutid las ventajas de organizar la información utilizando conjuntos.