

MUESTRA PARA EVALUACIÓN DOCENTE

# Propuesta metodológica

## 1-2 PRIMARIA



## **Acerca de Numicon**

Numicon permite una aproximación multisensorial al aprendizaje infantil de las matemáticas, resaltando tres aspectos fundamentales: la comunicación matemática, la exploración de relaciones y la realización de generalizaciones.

Numicon está basado en la experiencia diaria con alumnos que tienen grandes dificultades con las matemáticas, la frecuencia con la que se subestima la complejidad de los conceptos a los que se enfrentan y el reconocimiento de la importancia que tienen las matemáticas para ellos y para la sociedad en general.

Numicon pretende facilitar la comprensión de las matemáticas y lograr que los niños disfruten, utilizando materiales estructurados que permiten desarrollar habilidades de predicción mediante el reconocimiento de patrones. Todo ello mediante la propuesta de actividades multisensoriales basadas en la investigación.

Numicon tiene en cuenta la complejidad de los conceptos numéricos y busca promover la autoconfianza en los alumnos para que puedan enfrentarse a los diferentes retos o dificultades que se presenten.

Mediante la comunicación matemática (estar activos, establecer conversaciones y desarrollar una imagen mental de número), la exploración de relaciones y la generalización, los alumnos adquieren el respaldo necesario para estructurar sus experiencias, algo esencial para su desarrollo matemático y para su vida en general.

Este enfoque multisensorial les brinda la oportunidad de jugar y disfrutar, aprendiendo contenidos matemáticos. Los profesores y los padres pueden comprobar el nivel de comprensión de sus ideas matemáticas y compartir con ellos sus logros, observando lo que hacen y dicen mientras juegan.

Numicon busca servir de apoyo al profesor, proporcionándole material didáctico, ideas y formación que le ayudará a estimular a los alumnos en su viaje matemático.

# Índice

<b>Bienvenidos a Numicon</b>	<b>4</b>
Qué se incluye en <i>Números, Patrones y Operaciones</i> , y <i>Geometría, Medida y Estadística</i> en los dos primeros cursos de Educación Primaria.	
<b>¿Qué es Numicon?</b>	<b>12</b>
Cómo el uso de Numicon puede ayudar a los alumnos a aprender matemáticas.	
<b>Preparación para enseñar con Numicon</b>	<b>21</b>
Apoyo práctico para ayudar a la enseñanza diaria de las matemáticas. Se incluyen consejos sobre cómo configurar el aula, cómo planificar con Numicon y cómo evaluar el progreso de los alumnos.	
<b>Ideas matemáticas clave: Números, Patrones y Operaciones</b>	<b>41</b>
Relación de los contenidos matemáticos que los alumnos encontrarán en los grupos de actividades de las guías didácticas <i>Números, Patrones y Operaciones</i> de los dos primeros cursos de Educación Primaria.	
<b>Ideas matemáticas clave: Geometría</b>	<b>57</b>
Relación de los contenidos matemáticos sobre geometría que los alumnos encontrarán en los grupos de actividades de las guías didácticas <i>Geometría, Medida y Estadística</i> de los dos primeros cursos de Educación Primaria.	
<b>Ideas matemáticas clave: Medida y Estadística</b>	<b>71</b>
Relación de los contenidos matemáticos sobre medida y estadística que los alumnos encontrarán en los grupos de actividades de las guías didácticas <i>Geometría, Medida y Estadística</i> de los dos primeros cursos de Educación Primaria.	
<b>Dr. Tony Wing: La teoría en la que se apoya Numicon</b>	<b>85</b>
Más datos sobre la teoría que subyace a Numicon.	
<b>Glosario</b>	<b>95</b>
Definiciones de términos que se utilizan en Numicon.	

# Bienvenidos a Numicon

Para poder trabajar con Numicon y sacarle el mayor partido posible, es importante familiarizarse con el material y con los recursos con los que cuentan el profesor y el alumno.

En esta *Propuesta metodológica*:

- Se describe el proyecto Numicon.
- Se expone cómo el uso de Numicon influye en la forma de enseñar las matemáticas.
- Se definen los contenidos matemáticos a los que los alumnos se enfrentan en los grupos de actividades.
- Se proporciona información sobre la teoría subyacente a Numicon, desarrollada por el Dr. Tony Wing.



1



3



2



4

### ¿Qué contiene la caja *Bases firmes*?

La enseñanza con Numicon implica la utilización de recursos manipulativos para apoyar el aprendizaje matemático de los alumnos. A continuación se describe el contenido de la caja *Bases firmes*. Estos recursos se utilizarán en las actividades clave y en las actividades individuales descritas en las guías didácticas.

#### Contenido de la caja *Bases firmes*

- Formas Numicon (2 juegos de 80)
- Clavijas de colores Numicon (2 bolsas de 80)
- 6 Tableros Numicon
- 3 Bolsas sensoriales Numicon
- Línea numérica desplegable Numicon
- 3 Líneas numéricas de decenas Numicon
- Línea numérica 0-31 Numicon (2 juegos de 3)
- Línea numérica 0-100 cm Numicon (2 juegos de 3)
- 4 Ruletas Numicon
- Dados Numicon (1 juego de 4)
- Cartas 0-100 Numicon (2 juegos)
- Tiras de números 1-100 Numicon (2 juegos)
- Buzón Numicon (1 juego de 3)
- Regletas Numicon (juego grande)
- Bandejas para Regletas Numicon del 1 al 10 y del 20
- 3 Guías para Regletas 0-100 cm Numicon
- Formas Numicon del 10 (2 juegos de 10)
- Formas Numicon del 1 (1 juego de 20)
- Banda magnética

#### Formas Numicon 1

Representación manipulativa y visual de los números.

#### Clavijas de colores Numicon 2

Piezas rojas, azules, amarillas y verdes que se utilizan para hacer patrones y composiciones, y para trabajar la posición y el movimiento en el Tablero Numicon.

#### Tablero Numicon

Tablero cuadrado con 100 salientes donde encajan las Formas y las Clavijas Numicon. Se puede utilizar para realizar actividades de cubrir el Tablero con Formas Numicon, para crear diseños simétricos, para trabajar la posición y el movimiento, como base para la construcción de torres con las Formas y las Clavijas o para descubrir diferentes maneras de combinar las Formas Numicon.

#### Bolsa sensorial Numicon 3

En ella se pueden introducir Formas Numicon o figuras geométricas. Al tocar las Formas Numicon se fomenta que los alumnos visualicen y desarrollen su propia imagen mental y táctil de los números; si tocan figuras geométricas, se les anima a que visualicen sus elementos y propiedades ayudándoles a construir su propia imagen mental y táctil de las figuras de dos y tres dimensiones.

#### Línea numérica desplegable 4

Referencia visual para que los alumnos establezcan conexiones entre las Formas Numicon, los números, los nombres de los números y la recta numérica.



5



7



6



8

### Línea numérica de decenas 5

Muestra Formas Numicon del 10 colocadas horizontalmente de un extremo al otro de la recta, indicando las decenas completas desde el 0 hasta el 100. Ayuda a desarrollar la noción de cardinal de los números hasta el 100 y lo relaciona con su valor posicional.

### Línea numérica 0-31

Muestra los números del 0 al 31 espaciados para que los alumnos puedan colocar un objeto sobre cada uno de ellos cuando realizan las actividades de conteo, ayudándoles a generalizar la idea de que el último número que cuentan es el que les indica *cuántos son*.

### Línea numérica 0-100 cm 6

Muestra una recta con los números del 0 al 100 con separaciones de 1 cm entre ellos. La línea numérica está dividida en decenas, que se distinguen alternando el color rojo y el azul. Este recurso también puede utilizarse con las Regletas Numicon.

### Ruleta Numicon 7

Recurso que puede utilizarse en muchas de las actividades como alternativa a los Dados Numicon. Sobre ella pueden colocarse distintas plantillas (presentadas como imprimibles) que permitirán dar instrucciones a los alumnos sobre números, patrones de las Formas Numicon, monedas, símbolos matemáticos, figuras geométricas o indicaciones de movimientos.

### Dados Numicon

Juego de cuatro dados en los que se muestran los patrones de las Formas Numicon junto con el número correspondiente: dos dados del 0 al 5, uno del 5 al 10 y otro con los signos + y -. Pueden utilizarse en muchas actividades y como alternativa a las Ruletas Numicon.

### Cartas 0-100 Numicon

Juego de cartas numeradas del 0 al 100 que puede utilizarse en varias de las actividades para generar números con los que después trabajarán los alumnos.

### Tiras de números 1-100 8

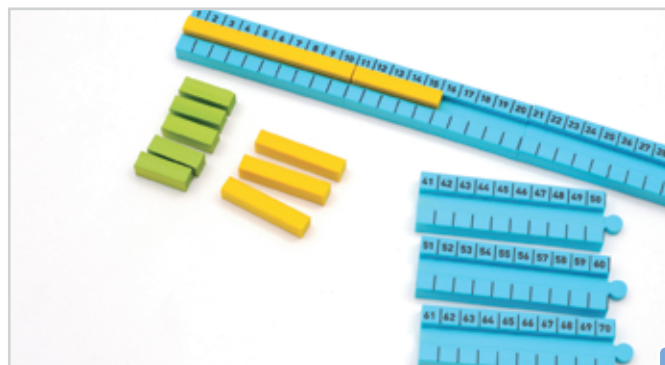
Diez tiras numeradas del 1 al 10, del 11 al 20, del 21 al 30, etc. Pueden colocarse horizontalmente, una detrás de otra, o como una matriz para formar una cuadrícula.

### Buzón Numicon

Buzón de cartulina en el que depositar Formas Numicon, figuras geométricas y tarjetas que muestran operaciones o medidas. Este recurso ayuda a que las actividades prácticas resulten más atractivas y divertidas.



9



11



10



12

### Regletas Numicon 9

Caja que contiene regletas con una base cuadrada de 1 cm de lado y diez longitudes y colores diferentes. La más corta es de 1 cm de longitud, y la más larga, de 10 cm. Es un material estructurado que permite trabajar los números y las relaciones numéricas. Se utilizan junto a las Formas Numicon en muchas de las actividades. Al estar marcadas en centímetros, también pueden colocarse a lo largo de la Línea numérica 0-100 cm y emplearse para introducir los centímetros como unidad de longitud.

### Bandejas para regletas Numicon 10

Una bandeja para cada Regleta Numicon del 1 al 10, y otra, para Regletas hasta el 20. Son útiles para construir patrones y trabajar operaciones numéricas con las Regletas.

### Guías para regletas 1-100 cm 11

Útiles para enseñar el valor posicional, la multiplicación y la división. Las guías encajan unas con otras para formar otra mayor de un metro de longitud. Diseñadas para que puedan separarse fácilmente o para colocarse como una matriz.

### Banda magnética

Tira magnética autoadhesiva que se puede trocear y pegar en la parte posterior de las Formas o las Regletas Numicon para utilizarlas sobre una pizarra magnética.

### Disponible por separado

#### Juegos individuales de Formas Numicon del 1 al 10

Se utilizan en las actividades con toda la clase en las que se invita a cada alumno a trabajar con su propio juego de Formas Numicon. Son especialmente útiles ya que ayudan a los profesores a evaluar las respuestas individuales de los niños a partir de las Formas que estos muestran en la mano.

#### Balanza Numicon 12

El uso de la Balanza Numicon con las Formas o las Regletas Numicon permite ver a los alumnos las combinaciones que son equivalentes, ayudándoles a entender que el signo = significa *de igual valor* y evitar así que lo confundan con una instrucción para hacer algo. Los niños pueden ver fácilmente qué Formas hay en los platillos. También se puede utilizar para explorar los conceptos *pesado* y *ligero*.

#### Línea numérica 0-1001

Muestra una recta con los números del 0 al 1001 con separaciones de 1 cm entre ellos. Este recurso puede utilizarse para dar una idea de lo grande que es el número 1000. También se puede trabajar con partes de esta línea para apoyar el aprendizaje de los alumnos con números altos.

### Otros materiales

En algunas actividades se utilizan materiales presentes en casi todas las aulas como **bloques multibase**, **cubos encajables** y **objetos para clasificar**. Las oportunidades para utilizarlos se recogen en el apartado *Material necesario* de cada actividad.



### Materiales didácticos recomendados para la enseñanza de la geometría y la medida

La enseñanza de la geometría y la medida con Numicon implica la utilización de los recursos manipulativos descritos a continuación, presentes en casi todas las aulas y disponibles en el mercado. También serán necesarios otros materiales como cubos encajables, objetos para clasificar, trozos de cuerda, papel cuadriculado... Estos recursos y materiales se utilizarán en las actividades clave y en las actividades individuales descritas en las guías didácticas de *Geometría, Medida y Estadística*.

#### Bloques geométricos

Conjunto de formas de fácil manipulación. Los alumnos los pueden utilizar para explorar y comprender los elementos y las propiedades de las figuras planas, para realizar dibujos o patrones, para investigar, por ejemplo, cómo estas formas pueden combinarse para elaborar otras figuras o mosaicos, e incluso para construir patrones repetitivos o simétricos.

Se pueden encontrar como imprimibles para recortar en Oxford Premium.

#### Tiras de mecano y conectores

La unión de tiras de mecano –tiras flexibles y perforadas de distinta longitud– permite a los alumnos construir, modificar y rehacer figuras, además de ayudarles a vincular las propiedades de los modelos que construyan a conceptos como espacio, línea, ángulo y forma.

Se pueden encontrar como imprimibles para recortar en Oxford Premium. Para un mejor mantenimiento se aconseja plastificarlas y conectarlas mediante encuadernadores.

#### Figuras geométricas

Es recomendable que los alumnos tengan siempre a su disposición una gran cantidad de imágenes y ejemplos de figuras geométricas para observarlas, manipularlas y hablar sobre ellas mientras juegan y trabajan en clase. Tanto las figuras planas (cuadrados, rectángulos, triángulos, círculos...) como los cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, pirámides, prismas, cilindros, esferas y conos) deben estar presentes en clase en diferentes tamaños, formas y contextos. Mostrar a los alumnos imágenes y ejemplos de estas formas dentro de contextos apropiados puede ser de gran utilidad para ayudarles a percibir figuras geométricas en objetos cotidianos.

#### Geoplanos y gomas elásticas

Una manera sencilla y rápida de que los alumnos construyan y modifiquen figuras planas es ajustar gomas elásticas a las clavijas de un geoplano. Esta técnica les permite explorar una gran variedad de conceptos geométricos como ángulos, simetría, área y perímetro, transformaciones y coordenadas, entre otros. Existen varios tipos de geoplanos, aunque el más común es el cuadrado. Los niños pueden utilizar el Tablero Numicon como geoplano cuadrado y registrar sus ideas y resultados en papel punteado, disponible como imprimible en Oxford Premium.

Los geoplanos de forma isométrica son más idóneos para representar triángulos equiláteros y una gran variedad de cuerpos geométricos. En este caso, es de gran utilidad el papel punteado de forma isométrica disponible como imprimible en Oxford Premium.

#### Relojes

Los relojes analógicos y digitales, y las imágenes de estos, ayudan a los alumnos a aprender a medir el tiempo y a decir la hora. Los relojes de aguja (o las esferas del reloj con manecillas) son necesarios para demostrar e ilustrar el movimiento vinculado de las manecillas de la hora y los minutos. En Oxford Premium se pueden encontrar imprimibles de esferas de reloj para representar y registrar el aprendizaje de los alumnos.

Los niños estarán más familiarizados con los relojes digitales por ser más comunes en aparatos y electrodomésticos. Se pueden utilizar dibujos para relacionar la hora en relojes digitales con el ciclo de las doce horas representadas en la esfera del reloj.

Asimismo, se recomienda el uso de imágenes y ejemplos variados de relojes (de pared, de muñeca, despertadores digitales...) para animar a los alumnos a determinar sus diferencias y similitudes y, básicamente, a consolidar su capacidad para decir la hora.



## Instrumentos de medida

En la guía didáctica *Geometría, Medida y Estadística 1*, los alumnos utilizan unidades de medida no convencionales para explorar la longitud, el peso y la capacidad. Por ejemplo, miden la distancia en número de pasos o la capacidad en cacitos. Es en *Geometría, Medida y Estadística 2* donde se introducen las unidades de medida convencionales (metros, centímetros, kilogramos, gramos, litros, mililitros...).

Antes de utilizar la regla o el metro, los alumnos miden en centímetros utilizando las Regletas Numicon (la Regleta-1 equivale a 1 cm) junto con las Guías para regletas 0-100 cm Numicon (o la Línea numérica 0-100 cm) y el papel cuadriculado. Más adelante, usan la regla o el metro para investigar la relación entre el centímetro y el metro.

Para trabajar la masa necesitan objetos para pesar, incluidos aquellos que cuestionen la idea de que más grande es igual a más pesado (por ejemplo, una caja grande de cereales es grande pero ligera o un pisapapeles es pequeño pero bastante pesado). Al principio, los alumnos emplean la balanza para comparar pesos con mayor precisión para después pasar a utilizar las unidades de peso convencionales en *Geometría, Medida y Estadística 2*. Con el fin de incrementar las experiencias de los alumnos, es aconsejable proporcionarles, en la medida de lo posible, ejemplos e imágenes de los distintos tipos de balanzas que existen. Para estudiar los kilogramos y los gramos manipulan paquetes de alimentos de un kilogramo, por ejemplo de pasta o arroz (y también paquetes de mayor tamaño, como cajas de cereales o de palomitas para demostrar que el peso no depende del volumen). Para ello, utilizan balanzas y paquetes de un kilogramo como unidad de medida. A continuación, miden en gramos, usando pastillas de jabón (muy fáciles de fraccionar) de 100 g como unidad de medida.

En las sesiones relativas a la capacidad, los alumnos utilizan agua, por lo que es importante que trabajen en un espacio apropiado y que dispongan de los utensilios necesarios para contenerla, como cubos, barreños y embudos, además de prendas impermeables. También es posible usar materiales secos que se puedan verter, como arroz o arena. Igualmente, se necesitan varios tipos de recipientes de diferentes tamaños y formas, como jarras, botes, tazas, cacitos, boles, vasos de laboratorio, botellas transparentes de un litro y tapones de botella para medir en mililitros.

En *Geometría, Medida y Estadística 2*, los alumnos emplean termómetros para aprender a medir la temperatura en grados centígrados.

En general, resulta muy útil tanto el uso de distintos instrumentos de medida de diseños y materiales variados, como el de tipos de escala desiguales con marcas y espaciados diferentes. Esto ayudará a los alumnos a comprender que las unidades convencionales son cantidades fijas y que no dependen del aspecto que tenga el instrumento de medición; por ejemplo, una regla,

un metro y un podómetro son muy dispares en apariencia, pero las distancias que miden son idénticas. Por ello se recomienda, en la medida de lo posible, proveer a los niños de todo tipo de ejemplos e imágenes de instrumentos para medir con el fin de ampliar sus conocimientos.



17



18

## Recursos didácticos Numicon

### Guías didácticas 17

Contienen grupos de actividades claramente explicadas y ejemplificadas con ilustraciones. Cada grupo comienza con la presentación de un texto que hace referencia al contexto pedagógico, los criterios de evaluación, los estándares de aprendizaje y el vocabulario matemático, esencial para la comunicación matemática en las actividades en grupo.

Como apoyo a la evaluación de los alumnos por parte de los profesores, se ofrecen sugerencias acerca de qué observar y escuchar mientras los niños trabajan en las actividades, así como algunas propuestas para la práctica tanto individual como de toda la clase.

En estas guías se puede encontrar:

- Información sobre cómo utilizar el material didáctico Numicon y apoyo para la planificación y la evaluación.
- La planificación de los grupos de actividades.
- Un resumen de los grupos de actividades incluidos en cada guía, destacando el título, el número y los contenidos matemáticos que contiene cada uno.
- Recursos imprimibles relacionados con los grupos de actividades (en Oxford Premium).

### Propuesta metodológica 18

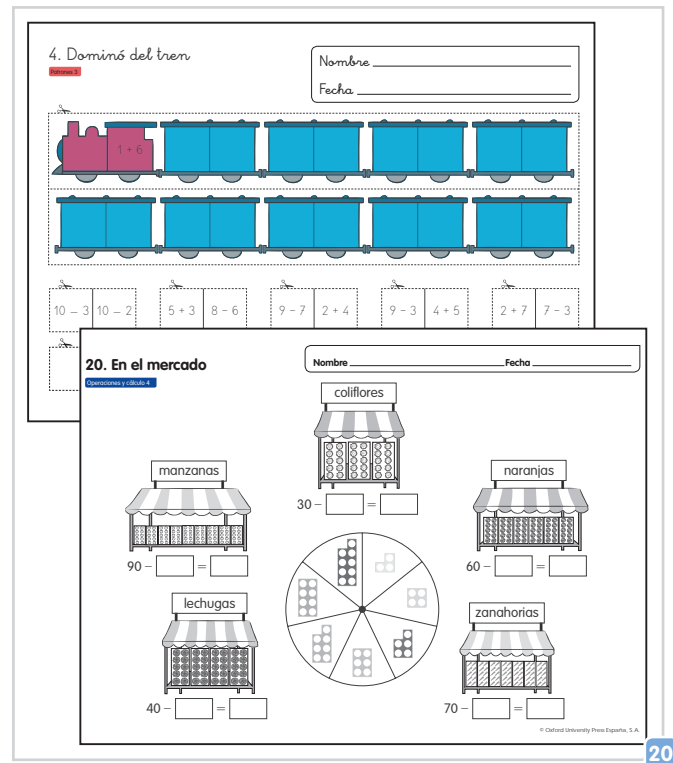
En esta guía se explica qué es Numicon y cómo ayuda a los alumnos a cumplir con las exigencias de la enseñanza de las matemáticas. También se incluyen algunos consejos prácticos sobre qué hacer para enseñar con Numicon y se responden algunas preguntas clave sobre cómo utilizar Numicon en la práctica.

Las secciones *Ideas matemáticas clave* ofrecen explicaciones útiles sobre los contenidos matemáticos más importantes que los alumnos trabajarán durante los dos primeros cursos de Educación Primaria. También se presenta un capítulo en el que se expone con más detalle el contexto de la investigación que inspiró Numicon y las razones en las que se fundamenta esta pedagogía.

Se pueden consultar las diferentes secciones de la *Propuesta metodológica* cada vez que sea necesario obtener ayuda para la enseñanza.



19



20

**Material del alumno 19**

El proyecto Numicon incluye materiales para el alumno que refuerzan las actividades realizadas en el aula. Los retos que se proponen en ellos permiten pasar de la manipulación reflexiva, que se da durante el desarrollo de las actividades manipulativas Numicon, a la expresión de lo manipulado mediante el lenguaje verbal, gráfico y simbólico.

Los desafíos planteados en estos materiales no son exámenes. Las actividades tienen como objetivo averiguar hasta qué punto los alumnos son capaces de poner en práctica lo aprendido en un contexto nuevo o diferente.

Ser capaz de utilizar las matemáticas en una situación nueva o desconocida es un indicador significativo de la comprensión y competencia matemática de los niños. Muchas de las actividades de estos materiales del alumno presentan las matemáticas en un contexto diferente, invitando a los niños a demostrar en qué medida son capaces de razonar más que verificar si han aprendido una solución rutinaria.

Al igual que con las actividades en el aula, los alumnos deberían disponer libremente de recursos manipulativos para razonar la solución de las actividades propuestas.

**Fichas para practicar en casa 20**

Las actividades propuestas en estas fichas ofrecen a los alumnos la oportunidad de comentar y practicar las matemáticas fuera del aula con los padres o tutores.

Incluyen orientaciones para llevar a cabo las actividades, así como sugerencias sobre cómo hacerlas más interesantes o cómo desarrollarlas en una situación de la vida real.

Todas las actividades de estas fichas van acompañadas de una sencilla explicación destinada a los padres que permite dirigir y sacar el máximo partido a cada propuesta.

# ¿Qué es Numicon?

Con el fin de explicar cómo el uso de Numicon en las aulas puede ayudar a los alumnos a aprender matemáticas, en esta sección se aborda:

- Qué es Numicon.
- Qué exigen las matemáticas de los alumnos.
- Cómo el uso de Numicon ayuda a los alumnos.

Más información sobre la teoría subyacente a Numicon del Dr. Tony Wing en la página 85.



## ¿Qué es Numicon?

Numicon es un enfoque único sobre el aprendizaje matemático de los alumnos que subraya tres aspectos clave de las matemáticas: la comunicación matemática, la exploración de relaciones y la generalización.

### Comunicación matemática

Aprender matemáticas implica comunicarse y pensar matemáticamente. La comunicación es una manifestación del pensamiento al exterior. Mientras los alumnos aprenden a comunicarse de forma matemática, aprenden a pensar matemáticamente. Esto exige:

**Actividad.** El proceso de enseñanza y aprendizaje con Numicon requiere que los alumnos sean activos. Activos no solo desde el punto de vista físico o manipulativo (por ejemplo, con actividades como encajar objetos, encontrar un número en una línea numérica, dibujar una Forma...), sino reflejando la idea de que las matemáticas en sí mismas son una actividad mental.

Esto significa, en la práctica, que son los propios alumnos los que tienen que utilizar las matemáticas. Decirles o explicarles qué hay que hacer, puede incitarles a ser pasivos. Numicon requiere que sean los niños quienes desplieguen su propia actividad mental para interpretar o resolver situaciones en las que se pueden utilizar las matemáticas.

**Imagen mental.** Utilizar las matemáticas, es decir, pensar y comunicarse matemáticamente, implica ayudar a los alumnos a ampliar la riqueza de las imágenes conceptuales de los diferentes contenidos matemáticos.

Dado que las matemáticas permiten establecer relaciones entre objetos, acciones y medidas, es imposible explorar dichas relaciones sin recurrir a algún tipo de imagen mental.

Numicon requiere que todas las actividades se trabajen de forma manipulativa para aumentar la comprensión y aplicación de los conceptos matemáticos y desarrollar imágenes mentales. Así es como pueden explorarse y comunicarse las relaciones matemáticas en una gran variedad de contextos.

**Hablar.** Ya que el uso de las matemáticas requiere comunicarse matemáticamente (con los demás y con uno mismo), también implica dialogar. Hablar es un aspecto esencial de la actividad Numicon.

En todo Numicon, hablar significa mantener un diálogo en el que se intercambian puntos de vista entre profesores y alumnos, y entre alumnos y alumnos. Estos diálogos fomentan el desarrollo del pensamiento reflexivo, permiten que los alumnos ordenen su pensamiento, compartan sus ideas y estimulan su interés.

### Explorar relaciones (en diversos contextos)

Trabajar las matemáticas implica explorar relaciones en cualquier situación. La comprensión de las relaciones presentes en una situación puede hacerla predecible. La expresión de estas relaciones por parte de los alumnos es una muestra del desarrollo y la aplicación del razonamiento matemático.

Numicon hace que los alumnos exploren las relaciones dentro de una diversidad de contextos, de modo que aprendan no solo cómo trabajar las matemáticas, sino cuándo este aprendizaje es útil.



### Generalizar

En matemáticas, explorar relaciones y buscar patrones en diversas situaciones conduce a la generalización.

Los números son generalizaciones que se utilizan para hacer predicciones cuando se calcula. Por ejemplo, el «6», el «2» y el «8» en la expresión « $6 + 2 = 8$ » son generalizaciones: 6 cosas cualesquiera y 2 cosas cualesquiera sumarán siempre 8 cosas cualesquiera.

Ejemplos de generalizaciones pueden encontrarse en otras ramas de las matemáticas, como, por ejemplo, en geometría al afirmar que la suma de los ángulos de un triángulo es  $180^\circ$  o que el área de un círculo es  $\pi r^2$ .

En cada uno de estos casos, la detección de un patrón y el establecimiento de relaciones permite generalizar sobre un número infinito de situaciones similares.

El hecho de usar generalizaciones continuamente cuando se trabaja con las matemáticas es lo que hace que el pensamiento y la comunicación matemática tenga un carácter tan abstracto para los alumnos si no se les invita a que sean ellos mismos los que hagan la generalización.

**Comunicarse matemáticamente, explorar relaciones y generalizar** van unidos cuando se trabaja con las matemáticas.

### ¿Qué exigen las matemáticas de los alumnos?

Durante la etapa de Educación Primaria, los alumnos aprenden a utilizar las matemáticas y se enfrentan a un desafío único en su currículo escolar: pensar y comunicar acerca de objetos abstractos.

Números como el 6 o el 254 son objetos abstractos sobre los que tienen que razonar en estas edades tan tempranas. No es de extrañar que los niños puedan dudar, quedar desconcertados, atascarse o necesitar tiempo para resolver las cosas por ellos mismos.

La mayoría de los matemáticos dirían que trabajar con las matemáticas consiste en buscar patrones en diferentes situaciones. Y así es, pero no solo eso. Cuando se encuentra un patrón, se ha encontrado una regularidad, algo que parece estar ocurriendo siempre, y esto significa que, cualquier patrón puede ser una generalización.

Los números son generalizaciones y, como tales, objetos abstractos. Desde una etapa muy temprana, a los alumnos se les pide que hagan cosas con montones de objetos abstractos, como esos que llamamos «3» y «10». No 3 bolígrafos o 10 caramelos, solo «3» o las dos cifras «10», sin nada más. Muy pronto también se les pide que sumen y resten estos objetos abstractos el uno del otro.

En matemáticas, es mucho lo que se espera de los alumnos desde el primer momento.



### El problema central: comunicarse con y sobre objetos abstractos

¿Es posible comunicarse con objetos abstractos? Y, dado que el pensamiento tiene una dimensión de diálogo interior o comunicación con uno mismo, ¿es posible pensar en objetos abstractos?

Abstracto no significa lo mismo que imaginario. Los objetos abstractos pueden poseer cualidades que no se pueden imaginar e incluir generalizaciones como *6 cosas cualesquiera*. El problema es que, al intentar imaginar 6 cosas cualesquiera, se pone de manifiesto que siempre se piensa en *6 de algo* (6 bolas, 6 botones, 6 niños...).

Según Jerome Bruner, el sujeto transforma la información que le llega por medio de tres sistemas de representación. Uno de ellos, la representación simbólica, es la que se utiliza cuando se piensa en objetos abstractos y supone representarlos mediante símbolos.

Lo importante de los símbolos es que no tratan de mostrar literalmente aquello de lo que se está hablando y son arbitrarios. Cuando lo que se está comunicando con estos símbolos es abstracto, la ausencia de una imagen es inevitable: ¿cómo podríamos imaginar algo que es abstracto? Es fácil imaginar 3 bolígrafos o 10 amigos, pero, ¿qué aspecto tendría el «3» abstracto? ¿Y el «10» formado por dos cifras? Dado que las cifras no tienen el aspecto de las cosas abstractas a las que representan, ¿cómo van a aprender los alumnos a interpretar estos símbolos arbitrarios en su pensamiento y comunicación? Trabajar con las matemáticas, pensar y comunicar cosas abstractas con símbolos, no es fácil para los niños pequeños.

### ¿En qué ayuda Numicon?

Numicon hace dos cosas. En primer lugar, parte de que para comprender lo que son los números, los alumnos tienen que generalizar. En segundo lugar, sigue el consejo de Bruner al utilizar las acciones y la visualización de los niños para prepararlos para el uso de los símbolos matemáticos en su pensamiento y comunicación.

Según Bruner, las representaciones *enactiva* e *icónica* se utilizan para dar forma a la interpretación que los alumnos hacen de la representación simbólica (por ejemplo, las cifras) que es necesaria para comunicar un patrón (generalización). Para ayudar a esta necesaria generalización, es importante utilizar materiales estructurados.

#### Generalización y razonamiento

Inicialmente, como ocurre en la enseñanza en general, Numicon recurre a una amplia variedad de objetos cotidianos (como cuentas, cubos, botones... Fig. 1) con el fin de ayudar a los alumnos a desarrollar la habilidad de contar antes de introducirlos en las dificultades de las operaciones y el cálculo.

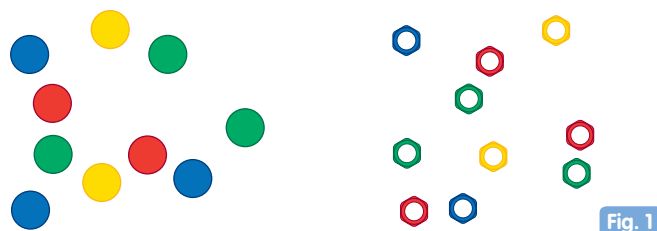
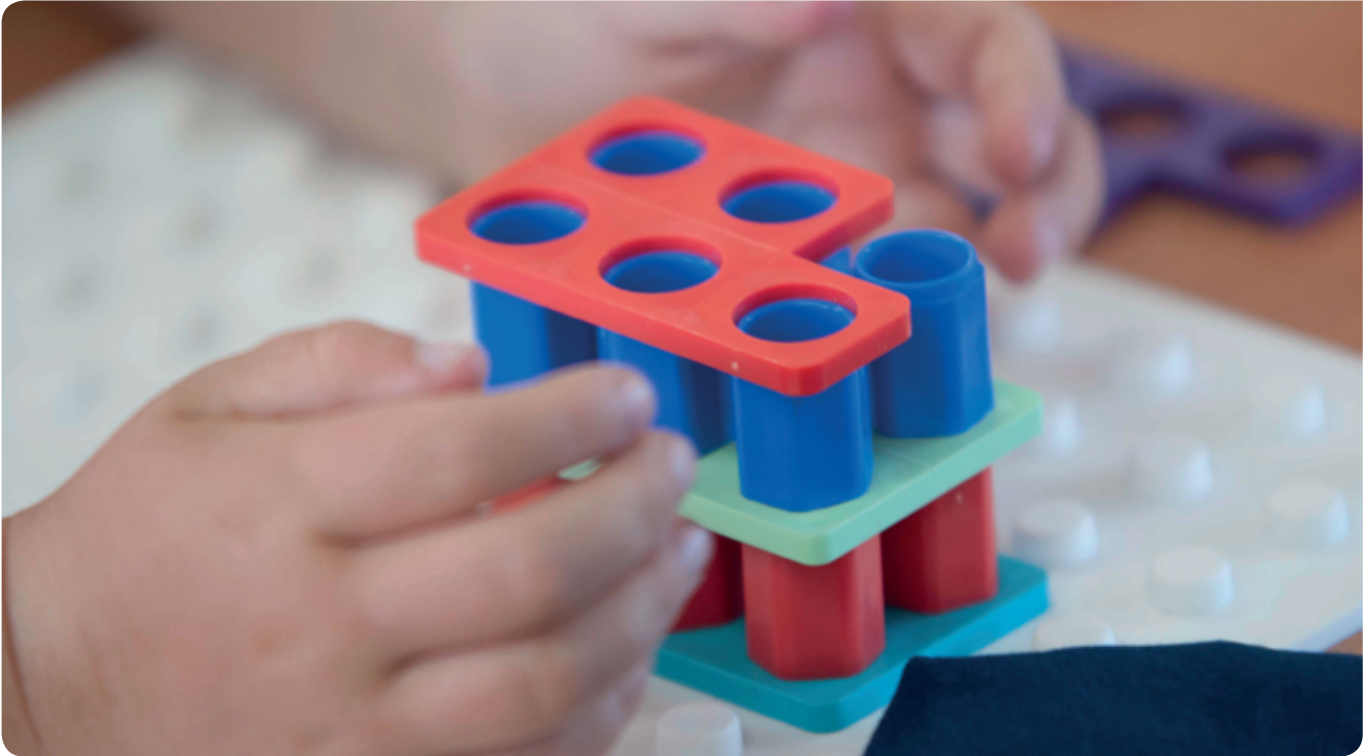


Fig. 1



Es importante destacar que Numicon también introduce conjuntos de materiales estructurados en los que las piezas individuales guardan relaciones entre sí, como, por ejemplo, las Formas y las Regletas Numicon (Fig. 2). Los alumnos exploran las cualidades, propiedades y relaciones de estos materiales, ordenando las piezas, comparándolas o combinándolas para formar otras.

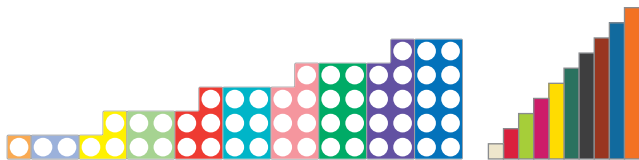


Fig. 2

De este modo, mientras los alumnos trabajan con grupos de objetos (cuentas, cubos) y con materiales estructurados (Formas y Regletas Numicon), combinan objetos e imágenes a la hora de hablar y pensar en números de cosas.

Para trabajar los números se utilizan conjuntamente materiales estructurados y no estructurados que permitan la representación simbólica, a la vez que se desarrolla la acción y la visualización de objetos.

Las líneas numéricas (Fig. 3) se introducen para representar mejor la ordenación que se evidencia en los materiales estructurados y para reforzar el concepto de orden de los números.

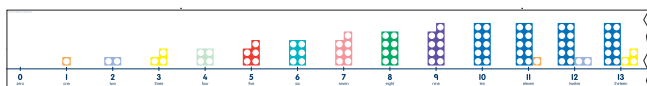


Fig. 3

Es importante señalar que los grupos de objetos se disponen como patrones de las Formas Numicon y que las Regletas Numicon son equivalentes en longitud a diferentes múltiplos de la regleta más pequeña o regleta unidad (Fig. 6).

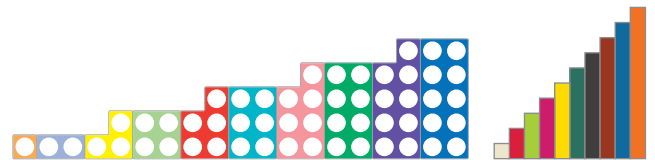


Fig. 2

A través de estas actividades, los alumnos comprenden que cualquier grupo de objetos se puede colocar siguiendo los patrones de las Formas Numicon y de este modo pueden leerlos. Aprenden a ver cuántos objetos hay en una colección, sin contarlos, y que los números de cosas toman una forma de manera organizada.

Llegado este momento, es posible preparar a los alumnos para generalizar sobre los números mediante la exploración de relaciones entre números de objetos. El pensamiento y la comunicación matemática de los niños continúa desarrollándose con la manipulación de los objetos que se les proporciona, y con la expresión oral de lo que ven y hacen.

Los alumnos podrán llegar a realizar la generalización de que cualquier colección de objetos puede colocarse formando patrones de Formas Numicon; también que cualquier número de regletas unidad puede ser intercambiado por una o más regletas más largas; por último, que cualquier número de objetos es equivalente a una o más Formas o Regletas Numicon.





Al darse cuenta de que cualquier colección de objetos puede colocarse como los patrones de las Formas Numicon, y de que cualquier número de regletas unidad es equivalente a una o más Regletas Numicon, los alumnos serán capaces de generalizar cualquier ejemplo.

Las Formas y las Regletas Numicon pueden, a su vez, utilizarse para explorar y comunicar relaciones numéricas en general. También sirven de mediadores de comunicación en las conversaciones sobre los números y sus relaciones.

A modo de ejemplo, la Forma Numicon de tres agujeros encaja con la Forma de cinco agujeros. El resultado es equivalente a la Forma que tiene ocho agujeros (Fig. 5).

Del mismo modo, la regleta que vale tres unidades colocada en fila con la que vale cinco unidades, forman una regleta que vale ocho unidades (Fig. 6).

Cuando se colocan en fila la regleta 3 y la regleta 5 sobre una línea numérica, llegan a la posición marcada con el 8.

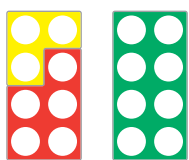


Fig. 5



Fig. 6

Partiendo de estas acciones y con estas imágenes, los alumnos serán capaces de generalizar que *3 cosas y 5 cosas juntas siempre forman 8 cosas*.

Esta generalización puede expresarse utilizando los símbolos numéricos y verbales: *3 y 5 juntos equivalen a 8*.

Más adelante, utilizando otras acciones e ilustraciones, los alumnos son capaces de interpretar y utilizar los signos  $+$  e  $=$  para expresar sus generalizaciones de este modo:

$$3 + 5 = 8$$

Es importante señalar que, llegada esta etapa, los niños tendrán que empezar a utilizar en el lenguaje oral los términos numéricos (uno, dos, tres) como sustantivos en lugar de como adjetivos (dos caramelos, tres lápices).

Con el uso de los términos numéricos como sustantivos, aparecen en el pensamiento matemático de los alumnos los números como *objetos abstractos*, a los que se hace referencia mediante *símbolos*.

Dicha generalización puede entonces aprovecharse aún más. *Si tres cosas y cinco cosas juntas siempre suman ocho cosas*, entonces:

$$\begin{aligned} 3 \text{ decenas} + 5 \text{ decenas} &= 8 \text{ decenas} \\ 3 \text{ centenas} + 5 \text{ centenas} &= 8 \text{ centenas} \\ 3 \text{ millones} + 5 \text{ millones} &= 8 \text{ millones} \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} 30 + 50 &= 80 \\ 300 + 500 &= 800 \\ 3\,000\,000 + 5\,000\,000 &= 8\,000\,000 \end{aligned}$$

Los alumnos pueden comenzar a utilizar en esta etapa las generalizaciones y la notación mediante símbolos para pensar y comunicarse matemáticamente.



### Progresar con Numicon

El ejemplo anterior pone de manifiesto cómo Numicon sirve de apoyo a la enseñanza de las matemáticas que los alumnos utilizarán más adelante.

A los niños se les ofrece la oportunidad de ilustrar las relaciones que observan entre los objetos de muchas formas y con materiales muy variados. Esto les permite realizar generalizaciones, pensarlas y comunicarlas, utilizando los símbolos de las matemáticas.

Evidentemente, no basta con el ejemplo anterior para poner de manifiesto todas las relaciones que los alumnos tienen que explorar, las generalizaciones que deben realizar y, por tanto, los símbolos que tienen que aprender a interpretar y utilizar. Sin embargo, dondequiera que se aplique, el enfoque es esencialmente el mismo. Las representaciones *enactiva* e *icónica* se utilizan para ir conformando la interpretación de los niños de la representación *simbólica* necesaria para pensar y comunicar su detección de patrones (generalización), en continuo desarrollo.

La tarea se va complicando a medida que los alumnos progresan en su trabajo con los números y se van introduciendo conceptos como el valor posicional, la descomposición, las fracciones, los decimales y los números negativos. El trabajo con estos conceptos es igualmente posible, utilizando el enfoque anterior para llegar a la generalización y al uso de símbolos que permitan comunicar información sobre los objetos matemáticos abstractos. Así es cómo los símbolos matemáticos adquieren sentido.

En geometría, las generalizaciones que los alumnos descubren se van produciendo más gradualmente a medida que progresan en su capacidad de razonar sobre objetos abstractos inventados, como, por ejemplo, *cualquier triángulo* y, más adelante, *cualquier polígono*.

Es imposible dibujar el objeto abstracto *cualquier triángulo* de la misma forma que es imposible imaginar *6 objetos cualesquiera*. En el momento en el que se dibuja un triángulo, comoquiera que se haya hecho, se ha dibujado un triángulo concreto; ya sea isósceles, equilátero o escaleno, lo que se ha dibujado no es un triángulo general, sino uno particular (Fig. 7).

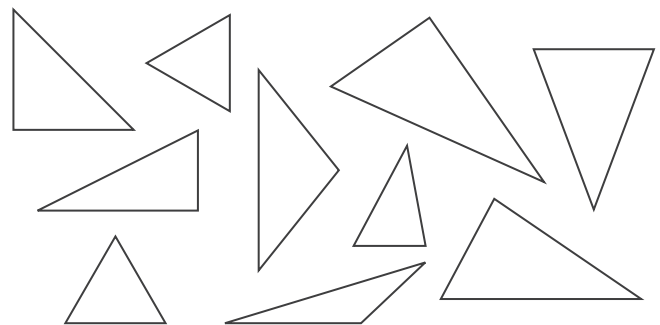
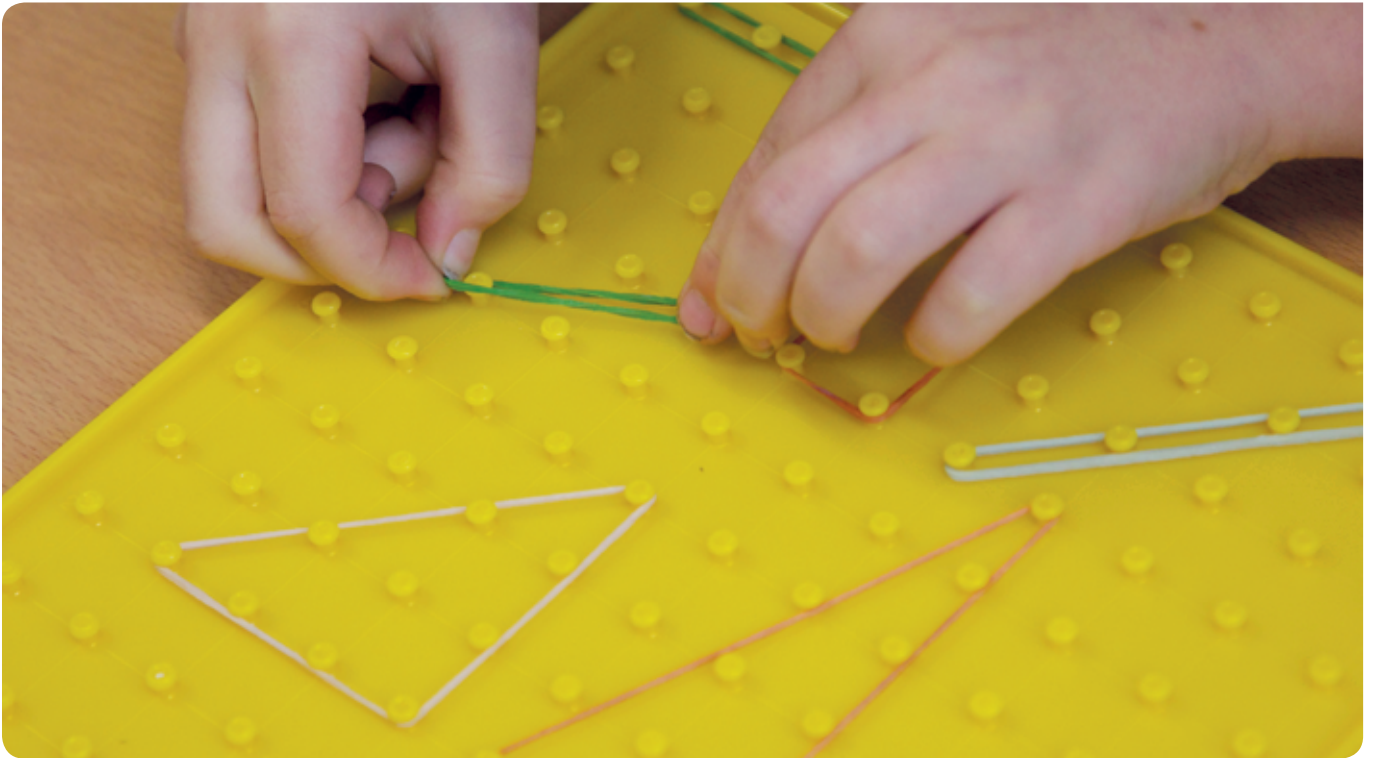


Fig. 7

Sin embargo, al igual que en la generalización sobre números, al trabajar la geometría con acciones e imágenes (representaciones *enactiva* e *icónica*) se prepara a los alumnos para razonar sobre cualquier triángulo con la representación simbólica (palabras y símbolos).



En este ejemplo, mientras los alumnos construyen y exploran una gran variedad de triángulos con diferentes materiales, lo que están manipulando y visualizando son las longitudes de los lados, que pueden variar infinitamente al cambiar los ángulos, y los ángulos, que pueden variar infinitamente al cambiar las longitudes de los lados. Sin embargo, pese a la variedad de lo que observan, las figuras que están creando siempre son triángulos.

Las imágenes mentales derivadas de estas experiencias manipulativas les permiten hablar y pensar de *cualquier triángulo* mientras imaginan una figura plana infinitamente flexible con tres lados rectos.

Fijándose en que los lados son rectos, que son siempre tres y encajan para cerrar las formas que hacen y, dejando de lado las longitudes de los lados y la amplitud de los ángulos, los alumnos llegan a ser capaces de imaginar *cualquier triángulo* y de razonar sobre él con palabras y símbolos.

Cuando los alumnos pueden imaginar y hablar de *cualquier triángulo*, están en condiciones de generalizar que, por ejemplo, *los ángulos de cualquier triángulo suman 180°*, utilizando acciones, imágenes o símbolos.

Del mismo modo que se llega a la generalización con números, la exploración de relaciones en geometría mediante la acción y las imágenes prepara a los alumnos para razonar correctamente sobre objetos matemáticos abstractos mediante símbolos.

### Usar las matemáticas en la vida cotidiana

El uso de las matemáticas en la vida cotidiana no se limita solo a hacer generalizaciones y a utilizar símbolos. También implica hacer uso de las generalizaciones para resolver problemas en situaciones concretas.

Por ejemplo, la generalización  $4 \times 25 = 100$  permite predecir que el perímetro de un cuadrado de 25 cm será de 100 cm o que el área de un campo que mide 4 m por 25 m será de 100 m<sup>2</sup>, o que si ahorras 25 € a la semana, después de 4 semanas tendrás 100 €. También puede ser muy útil para ayudar a calcular que:

$$36 \times 25 = (9 \times 4) \times 25 = 9 \times (4 \times 25) = 900$$

Los alumnos necesitan ser capaces de relacionar la representación simbólica de una generalización con una situación de la vida cotidiana en la que esta es útil. Por ejemplo, aprenden a dividir, pero necesitan asimilar y entender cuándo es útil dicha operación y en qué situaciones se aplica.

Los materiales didácticos Numicon organizan las actividades en grupos relacionados con contenidos matemáticos. Cada grupo de actividades se introduce mediante un contexto donde se ve la utilidad de las matemáticas.

Dichos contextos ayudan a los alumnos a entender la funcionalidad de lo que están aprendiendo.

### Flexibilidad, fluidez y perseverancia

Utilizar las matemáticas con eficacia incluye ser capaz de recordar generalizaciones conocidas, como las tablas de multiplicar o los componentes numéricos. Hay muchas actividades prácticas en los materiales Numicon que animan a los alumnos a familiarizarse con las operaciones básicas.

Además, ser eficaz incluye un aspecto esencial como es la flexibilidad de pensamiento.

La representación de experiencias por medio de la acción permite a los alumnos hacer y deshacer. Por ejemplo, los niños pueden averiguar cuántos objetos hay en una colección agrupándolos en decenas (y centenas) y, más adelante, cuando se introduzca la división, aprenderán que pueden deshacer esos grupos. Combinando y separando las Formas y las Regletas Numicon (hacer y deshacer), los alumnos son capaces de conectar la suma y la resta como operaciones inversas y comprobar si el resultado de una resta es correcto utilizando la suma.

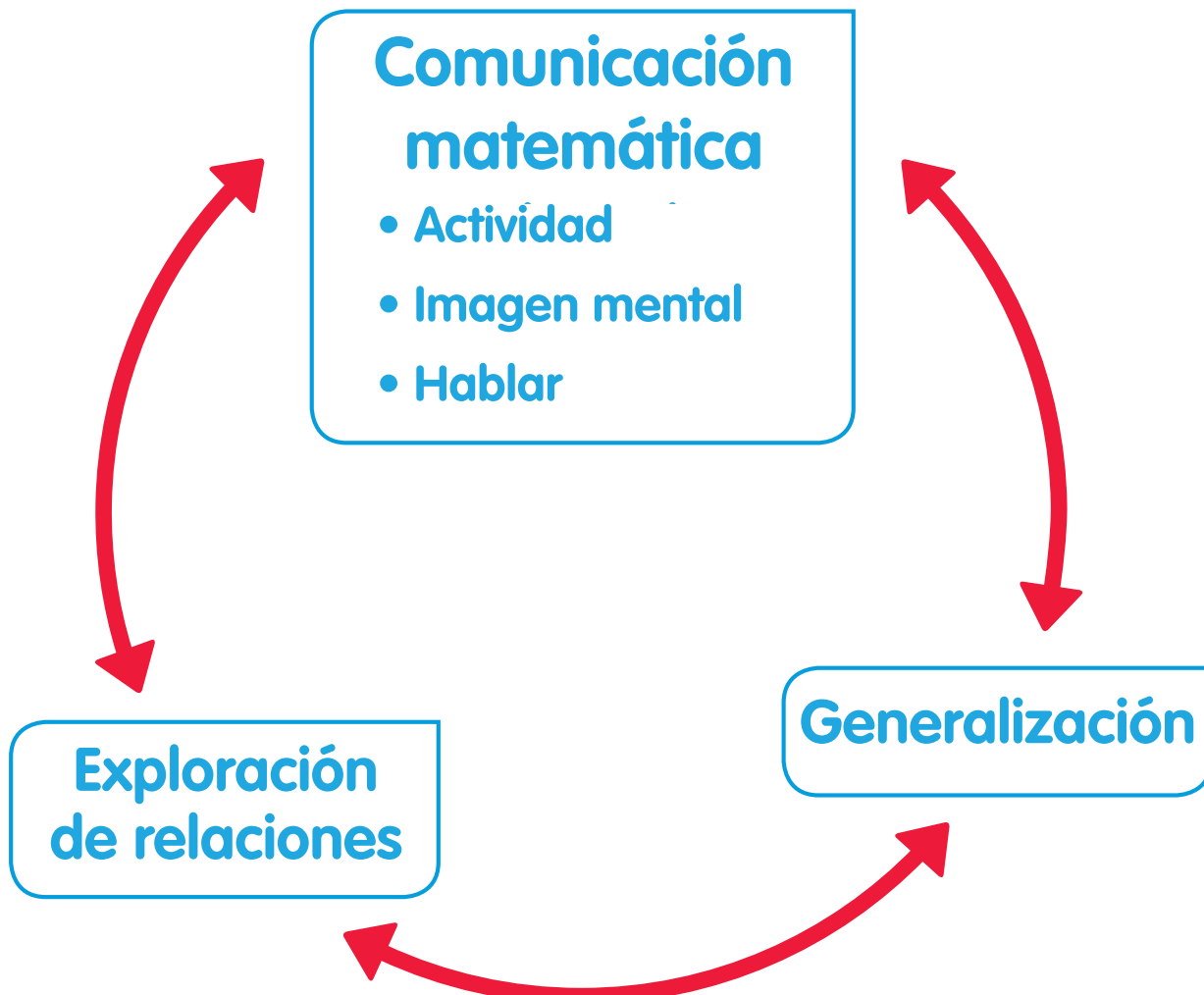
Promover diversas formas de cálculo hace que los alumnos sean capaces de elegir el adecuado, mediante un análisis de los números implicados, en lugar de adoptar un método estandarizado para cualquier cálculo. ¿Por qué restar 1998 a 4 673 colocándolos en vertical solo porque sean números altos?

Dado que Numicon aborda el uso de símbolos matemáticos por parte de los alumnos mediante actividades y acciones, si los niños se quedan *atascados* o dudan, siempre es posible recordarlos y volver a las actividades e ilustraciones de apoyo de las que surgió la generalización. Por ejemplo, si están trabajando números utilizando símbolos, se puede volver de nuevo a las representaciones *enactiva* e *icónica*, utilizando las Formas y las Regletas Numicon.

Por último, dado que Numicon da gran importancia a la comunicación matemática, es necesario recalcar a los alumnos que cuando se sientan *atascados* lo que deben hacer es comunicarlo.

La actividad, el desarrollo de imágenes mentales y la comunicación de las relaciones entre objetos suponen utilizar las matemáticas.

La perseverancia –una cualidad extraordinariamente valiosa cuando se trata de las matemáticas– consiste en continuar comunicándose, con uno mismo y con los demás, cada vez que uno no sabe adónde se dirige.



# Dr. Tony Wing: La teoría en la que se apoya Numicon



*Los profesores que utilizan Numicon enseguida se dan cuenta de lo que aprenden de las respuestas de los alumnos, como también lo hacemos los autores.*

*Por consiguiente, nuestra comprensión de las diversas maneras en las que los materiales estructurados pueden ser útiles a los niños en su aprendizaje de las matemáticas va aumentando continuamente.*

*Utilizar Numicon implica, en efecto, cierto grado de comprensión de la teoría subyacente, incluida una idea de a qué se enfrentan los alumnos mientras aprenden a utilizar las matemáticas.*

*La siguiente sección aborda lo que hemos aprendido en nuestro trabajo hasta este momento, a fin de ayudar a usar las actividades y materiales que hemos elaborado.*



### Utilizar las matemáticas: actividad y exploración de relaciones

Resulta muy útil considerar las matemáticas como una actividad mental, en lugar de como un montón de datos y técnicas que deben adquirirse de forma pasiva.

La razón por la que las matemáticas son consideradas tan importantes en la escuela está en el deseo de que, una vez que han terminado el colegio, los alumnos no solo recuerden parcialmente esos datos y técnicas que utilizaron para aprobar sus exámenes, sino que sean capaces de utilizarlos satisfactoriamente para resolver nuevos y desconocidos desafíos matemáticos en su vida diaria y en su trabajo.

Ser capaz de utilizar las matemáticas conlleva saber establecer relaciones y manipularlas para predecir resultados de interés. Por ejemplo, cuando se va de compras, las relaciones podrían incluir precios, presupuestos, monedas y disponibilidad de efectivo. Todas ellas podrían dirigirse a predecir si algo es asequible y, en tal caso, cómo pagarlo. Generalmente, una situación como esta requiere algo de cálculo. Aquí, las relaciones que se establecerían entre los números podrían consistir en aplicar la suma o la resta para predecir el total o la cantidad que nos tienen que devolver.

En el ejemplo anterior se pueden destacar tres aspectos del uso de las matemáticas:

- En primer lugar, hay que averiguar qué cantidades son importantes en la situación dada y cómo están relacionadas entre sí.
- En segundo lugar, hay que hacer algunos cálculos con esas cantidades.

- En tercer lugar, hay que interpretar los resultados del cálculo a fin de predecir qué ocurrirá una vez se haya tomado una determinada decisión.

Identificar y establecer relaciones en una situación con el objetivo de predecir unos resultados supone la búsqueda de la solución de problemas matemáticos y hacerlo, implica **explorar relaciones** (conexiones entre cosas) dentro de una situación.

Incluso un problema tan sencillo como *¿Cuántos alumnos van a comer hoy en el colegio?* implica cierto tipo de relación de orden para predecir el resultado con éxito. Por ejemplo, si no se cuenta a los niños en orden, puede que alguno quede sin contar o se cuente al mismo dos veces. Dentro de Numicon se anima constantemente a los alumnos a explorar las relaciones en diferentes situaciones para encontrar patrones y regularidades, y utilizarlos para hacer predicciones. Esto es fundamental para poder usar las matemáticas a cualquier nivel.

Hay que señalar que, cuando se quiere solucionar un problema de la vida real, como calcular el coste de la compra, se llega al punto en el que el contexto práctico se olvida y el trabajo se lleva a cabo estrictamente con números. Retroceder y avanzar entre situaciones concretas y el abstracto mundo de los números constituye uno de los principales retos a los que los alumnos se enfrentan a la hora de utilizar las matemáticas.

Algunos problemas surgen dentro de un *mundo numérico abstracto*, como, por ejemplo, calcular con más eficacia. Sin embargo, también estas situaciones requieren **ser activos**, **explorar** y utilizar las diversas relaciones que implican los números en sí.



Es importante tener en cuenta que utilizar las matemáticas en la vida diaria supone averiguar qué hacer en determinadas situaciones, ya que, a diferencia del colegio, no existe un programa planificado que pueda ayudarnos y los adultos tienen que ser capaces de enfrentarse a cualquier cosa que pueda surgir. Los alumnos también tienen que aprender a enfrentarse al desafío de ser capaces de utilizar las matemáticas en situaciones nuevas y, a menudo, desconocidas, en lugar de intentar recordar unas técnicas determinadas que han aprendido en un tema en concreto.

Esto tiene unas implicaciones importantes tanto para la enseñanza como para la evaluación. Los alumnos necesitan aprender a usar las matemáticas en situaciones nuevas y desconocidas, y explorar y manipular las relaciones entre las mismas. Los niños aprenden a utilizar las matemáticas en terrenos inexplorados<sup>19</sup>.

### Generalizar, pensar y comunicar

Utilizar las matemáticas hace predecible el mundo cotidiano en muchísimos aspectos. Por ejemplo, cuando uno se sube a un avión, espera llegar sano y salvo a su destino; se confía en que se puede encontrar comida en las tiendas habituales, como y cuando se quiera; se espera que la electricidad funcione en las casas y lugares de trabajo cada vez que se pulsa un interruptor. ¿Cómo es que estas expectativas cotidianas se cumplen tan a menudo? La respuesta es que

una serie de ingenieros aeronáuticos, pilotos, especialistas en logística, ingenieros eléctricos y estadísticos predicen estas cosas, utilizando las matemáticas.

El uso de las matemáticas implica una forma única de **pensar** y **comunicar** situaciones; una forma especial de comunicación, que ha sido desarrollada desde que los seres humanos comenzaron a interesarse por las cantidades y las relaciones.

Curiosamente, la comunicación matemática no solo se produce cuando se habla con alguien, sino que todas las personas se comunican matemáticamente con ellas mismas cada vez que las usan. Esto se llama pensar. Por ejemplo, si se intenta multiplicar 481 por 37, puede escucharse una voz interior mientras se hace la operación; se puede oír el pensamiento de uno mismo mientras se comunica el cálculo a uno mismo.

Es importante comprender cómo se desarrolla el pensamiento y la comunicación. A partir del trabajo de Vygotsky, Sfard<sup>20</sup> argumenta que el pensamiento se desarrolla como una versión propia e individualizada de la comunicación que se mantiene con otros. Esto significa que el pensamiento matemático de los alumnos es una versión individual de la comunicación que mantienen con sus profesores. Los niños aprenden a pensar participando de forma activa en la comunicación matemática que los rodea, incluyendo la comunicación consigo mismos.

Las capacidades de predicción y de comunicación en matemáticas están muy relacionadas. El hecho de que uno de los objetivos de las matemáticas sea predecir mediante la detección de patrones y regularidades es lo que ha determinado que el pensamiento y la comunicación matemáticos se hayan desarrollado como lo han hecho. Más concretamente, las matemáticas hacen predecibles las situaciones a través de la **generalización**. Como consecuencia de ello, con lo que se comunica y de lo que se comunica son **generalizaciones**.

Por ejemplo, el «3» es una generalización y los niños deben entenderlo como 3 cosas cualesquiera; los datos numéricos que los alumnos deben recordar son generalizaciones, así  $6 + 2 = 8$  significa *6 cosas cualesquiera y 2 cosas cualesquiera suman siempre 8 cosas cualesquiera*. En geometría, cuando se dice que *los ángulos de un triángulo suman 180°*, se quiere decir de cualquier triángulo, no de uno en particular.

Las generalizaciones son importantes porque se pueden utilizar para predecir resultados en situaciones determinadas. Por ejemplo, la generalización  $4 \times 25 = 100$  puede utilizarse para averiguar que el perímetro de un cuadrado de 25 cm de lado será de 100 cm o que si se ahorran 25 € a la semana,

20 Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. New York: Cambridge University Press.



en cuatro semanas se tendrán 100 € en total. También podría utilizarse para calcular que:

$$36 \times 25 = (9 \times 4) \times 25 = 9 \times (4 \times 25) = 900$$

En otras palabras, innumerables tipos de situaciones particulares pasan a ser mucho más manejables debido a una generalización.

Es necesario que los alumnos aprendan datos numéricos como, por ejemplo, que  $6 \times 3 = 18$ , pero lo más importante para que estos les sean útiles es que lleguen a ellos de una forma activa, a través de la realización de sus propias generalizaciones, y que aprendan cómo pueden utilizar estas generalizaciones en su pensamiento y comunicación matemática para hacer más predecible el mundo en el que viven.

El concepto de generalización, a pesar de ser una abstracción, se puede explicar como una simple *búsqueda de patrones*. El ser humano es excelente a la hora de buscar y encontrar patrones en sus experiencias. Los niños, en particular, son muy buenos en el análisis de patrones desde el día en que nacen. De hecho, aprenden la lengua materna prestando una extraordinaria atención a los patrones de los sonidos que escuchan.

Numicon conecta con esta increíble facilidad que tienen los niños para detectar patrones en diferentes situaciones. En ello radica la clave de pensar y comunicarse matemáticamente.

### ¿Cómo nos comunicamos matemáticamente?

Dada la gran cantidad de generalizaciones que se utilizan en las matemáticas, comunicarse no es fácil.

En primer lugar, la aplicación de generalizaciones para la resolución de algunos problemas puede hacer que algunas personas encuentren las matemáticas abstractas y, equivocadamente, desconectadas de la vida cotidiana.

En segundo lugar, es muy difícil hablar y pensar en cualquier cosa en general, imaginando algo en particular. Cuando se desea decir algo sobre las personas en general, habitualmente se tiene en mente una experiencia con personas concretas; cuando se habla con los alumnos de los triángulos en general, se les suele mostrar un triángulo o varios concretos. Lo mismo ocurre con las generalizaciones numéricas.

Cuando se habla a los alumnos de la generalización del «3», a menudo se les muestran tres cosas concretas, por ejemplo, tres fichas, aunque de algún modo se les esté pidiendo que lo interpreten como *3 cosas cualesquiera*. Saber *ver lo general en lo particular*<sup>21</sup> es clave para el uso de las matemáticas.

El desarrollo del pensamiento y la comunicación matemática depende de lo que se habla cuando se utilizan las matemáticas, tanto con uno mismo como con los demás.

Durante siglos, el ser humano ha desarrollado formas sofisticadas y eficaces de pensar y hablar sobre los números y otras generalizaciones matemáticas. No es de extrañar que los niños a veces encuentren difícil asimilarlas inmediatamente.

En la comunicación matemática de cantidades y números de cosas, las generalizaciones se convierten en objetos matemáticos. Por ejemplo, dado que sería muy incómodo estar siempre hablando de generalizaciones numéricas como *6 cosas cualesquiera* o *242 cosas cualesquiera*, en la práctica se dice solo «6» o «242». Y esto tiene sus consecuencias.

De esta manera casi accidental, los adultos, como expertos matemáticos, han optado por utilizar los términos numéricos como nombres y hablar y pensar en las generalizaciones *6 cosas cualesquiera* o *242 cosas cualesquiera* como si fueran, en realidad, objetos materiales existentes en el mundo, como, por ejemplo, sillas, mesas o ranas. Estas generalizaciones que convierten los objetos matemáticos en cosas se llaman *números*. En el ejemplo anterior, los objetos matemáticos «6» y «242» convierten estas expresiones de generalización en números.

Es importante tener en cuenta que, al nombrar algo utilizando una palabra como sustantivo, se anuncia implícitamente que se trata de una cosa o un objeto; así pues, al utilizar palabras y símbolos numéricos como sustantivos en lugar de como adjetivos, los niños se dan cuenta de que hablar de números es hablar de algún tipo de objeto.

21 Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic Examples: Seeing the General in the Particular, *Educational Studies in Mathematics*, 15 (3), 277–290.



Una generalización, como, por ejemplo, un número, no es una cosa material, sino un pensamiento construido mediante el uso de palabras o símbolos, y esto comienza a trabajarse muy pronto con los alumnos.

Curiosamente, la mayoría de las personas que han aprendido hace mucho tiempo a manejar los números tienden a sentirse como si de verdad pudieran moverlos y conectarlos cuando hacen cálculos, ya sea sobre el papel o mentalmente. Los adultos con conocimientos de aritmética generalmente hacen cálculos con números sobre el papel o en la calculadora como si esos símbolos fueran de alguna manera generalizaciones numéricas.

Por ejemplo, al intentar dividir 273 entre 46, tienen la sensación de que estos números se están tratando como si fuesen objetos de algún tipo y debieran moverlos e intercambiarlos por otros según las reglas que les han enseñado. ¿No es cierto que los números se convierten en cosas sobre el papel, o cifras en su cabeza o en la pantalla de la calculadora mientras hacen los cálculos?<sup>22</sup>

Los adultos piensan y hablan sobre las generalizaciones que se llaman números como cosas u objetos, como si estos objetos matemáticos fueran el mismo tipo de cosas que los objetos físicos del mundo cotidiano. Se les maneja, se les mueve, se les pone en fila en un papel. En general, las cifras se utilizan como si fueran cosas numéricas que se han inventado. ¿Cómo es posible que los niños encuentren sentido a todos estos objetos matemáticos invisibles de los que, de repente, empiezan a hablar junto con cifras en el colegio?

Lo primero que llama la atención es que son demasiados los alumnos que no llegan a encontrar sentido a los objetos numéricos durante sus años de escolarización. En la práctica, se espera que los niños muy pequeños pasen paulatinamente de hablar de 3 caramelos o 3 lápices, utilizando las palabras numéricas como adjetivos referidos a objetos físicos, a hablar solo de «3», la misma palabra utilizada en este caso como sustantivo, como hacen los adultos.

Después, mucho más adelante, cuando se introducen las fracciones, se espera que pasen de decir media pizza o media chocolatina a hablar solo de « $\frac{1}{2}$ », como algo que no es la mitad de nada en particular.

Todo esto puede resultar muy extraño y la mayoría de los niños no lo entienden con facilidad, mientras que los adultos esperan que simplemente traten de aceptarlo.



### ¿Qué se les muestra a los alumnos cuando se habla de números?

Muchas veces, en el mismo momento en el que a los alumnos se les está hablando de estas generalizaciones, por ejemplo, los números, utilizando para ello sustantivos, se comienza a hacer hincapié en los símbolos numéricos como si fuera evidente que lo que están viendo en la pizarra o en el papel fueran los números de los que se está hablando.

Existe una razón de peso para utilizar la representación simbólica en la comunicación matemática. Según Bruner, solo es posible hablar de generalizaciones mediante las representaciones simbólicas<sup>23</sup>. No es posible hacer un dibujo para mostrar 6 de nada porque, al intentar hacerlo o contar 6 objetos físicos, los niños ven 6 cosas de algo. La representación simbólica es lo que permite la comunicación sobre cosas inventadas, en este caso, los números.

A menos que se introduzcan con mucho cuidado, los niños suelen pensar que las cifras que ven son, en realidad, los misteriosos objetos numéricos.

Es más, tienen que entender que, por ejemplo, 3 más 3 es igual a 6. Es muy difícil encontrar sentido a estas relaciones numéricas si con lo único con lo que nos comunicamos son palabras y símbolos: 3 y 3 juntos no parecen 6, sino 33.

La dificultad está en encontrar formas de comunicar sobre objetos matemáticos que los alumnos no pueden ver, por ejemplo, los números, de manera que se evite confundirlos con las cifras y que les permitan explorar relaciones entre los mismos.

22 Resulta significativo que la mayoría de las personas utilicen distintas imágenes, así como dígitos numéricos, cuando hacen cálculos. Pero cuando se les pide que imaginen el número noventa y cuatro, por ejemplo, la mayoría imaginan dos dígitos numéricos (94), en ese orden, al margen de si también existe o no una imagen como una línea numérica determinada.

23 Véase Bruner, J. (1966). *Towards a Theory of Instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.



Una solución es introducir objetos e imágenes en la comunicación. Es decir, utilizar unas formas especiales para **ilustrar**, de forma activa y visual, las relaciones entre las generalizaciones abstractas.

Esta es la razón por la que, cuando se introduce a los alumnos en los números, los profesores suelen preparar colecciones de objetos e imágenes y utilizar las acciones con dichos objetos para ayudarles a ver y sentir cómo los objetos numéricos invisibles inventados con palabras se relacionan unos con otros<sup>24</sup>.

Este es el momento crucial en el que los alumnos deben empezar a ver lo general en las imágenes particulares que se les presentan. Se les puede ayudar, hablando con ellos mientras trabajan. Si utilizan fichas para contar o cubos, cuentas, alubias... para hablar de números, lo que se espera es que los alumnos se centren solo en cuántos hay e ignoren los diferentes tipos de objetos. Los niños se fijan en cuántos objetos distintos tienen delante e ignoran el tipo de objetos que son. De resaltar o ignorar<sup>25</sup> depende la capacidad de ver lo general en lo particular.

Las conversaciones con los alumnos son fundamentales porque nos permiten reflexionar sobre cómo piensan. Será necesario preguntarles muchas veces: *¿Creéis que el cálculo sería diferente si estas fichas fueran alubias? ¿Y si fueran lápices?*

En términos de Bruner, dado que mediante el pensamiento y la comunicación matemática los alumnos trabajan con

generalizaciones, al final acabarán aprendiendo a hacerlo de forma más eficaz mediante el uso de la representación simbólica, por ejemplo, utilizando signos y palabras al escribir y hablar para representar generalizaciones numéricas.

No obstante, los signos numéricos y las palabras son solo marcas sobre el papel y sonidos, que dependen para su interpretación de las experiencias previas que acompañan tanto a las acciones como a las imágenes y que han conducido a la generalización que simbolizan.

Así pues, el uso eficaz que los alumnos hacen de los signos en su pensamiento y comunicación o, en otras palabras, los cálculos que hacen, dependen de las experiencias previas que hayan tenido con representaciones *enactivas* e *icónicas* de números de objetos.

El aprendizaje de los alumnos, dirigido a pensar y comunicarse de forma matemática con generalizaciones, les conducirá finalmente a dominar la representación simbólica asociada (signos y palabras). A fin de alcanzar y mantener este dominio, no obstante, el camino que han de seguir pasa necesariamente por el uso de las representaciones *enactiva* e *icónica* (acción e imágenes). La enseñanza más eficaz, por tanto, implica que los alumnos trabajen las acciones, imágenes, palabras y símbolos que utilizan en la comunicación matemática.

Es importante recordar que la comunicación y el pensamiento matemático más eficaz a todos los niveles, conlleva una

24 Esto combina los tres modos de representación de Bruner, *enactivo*, *icónico* y *simbólico*, para enriquecer el aprendizaje de los niños lo más posible.

25 Véase una interesante exposición de esto y otras opiniones relacionadas en Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (Eds) (2004). *Fundamental Constructs in Mathematics Education*. London: RoutledgeFalmer, 126 y siguientes.



compleja combinación de representaciones *enactivas*, *icónicas* y *simbólicas*. La acción y las imágenes siempre sirven de apoyo a la interpretación de símbolos matemáticos y en ningún momento debería esperarse que los alumnos dejen atrás las acciones para pasar a un pensamiento adulto. A medida que el pensamiento de los niños se desarrolla, estos interiorizan las acciones e imágenes que les han conducido al uso eficaz de los símbolos, pero los materiales e imágenes siempre deberían estar disponibles en el aula para que puedan recurrir a ellos cada vez que se encuentren ante nuevas ideas o repasen las ya conocidas.

Como resumen de esta parte de la teoría sobre la que se apoya Numicon, los números y palabras son símbolos de vital importancia que gradualmente se convierten en cifras que representan objetos numéricos generalizados en la comunicación y en el pensamiento matemático avanzado.

Sin embargo, los símbolos, signos y palabras convencionales no pueden ilustrar ninguna relación entre números. Para que los niños aprendan a manejar las generalizaciones numéricas y sus conexiones de forma eficaz, necesitan contar con formas de acceder a la comunicación matemática y, por tanto, al pensamiento matemático con imágenes que los ayuden a *ver lo general en lo particular*.

Sfard denomina a los objetos e imágenes utilizados para este propósito *mediadores de comunicación*, dado que se utilizan para favorecer la comunicación con los alumnos. Dichos objetos e imágenes sirven, por tanto, para mediar en la comunicación matemática de los niños con ellos mismos.

Numicon introduce a los alumnos en el pensamiento y la comunicación de los números con una combinación de signos y palabras escritas y habladas, a través de

la mediación de esta comunicación simbólica con objetos e imágenes físicas (representaciones *enactiva* e *icónica*).

### ¿Qué mediadores de comunicación deberían usarse? ¿Importa cuáles sean?

Como se señaló previamente, la utilización de las matemáticas se centra en las generalizaciones. Durante el aprendizaje de las matemáticas, las personas adquieren la capacidad de resolver una gran variedad de problemas matemáticos a medida que van ampliando el repertorio de generalizaciones.

Por lo general, los alumnos aprenden primero a generalizar sobre cantidades y a hablar de las mismas con sus profesores y, luego, recurren a estas generalizaciones cuando más adelante tienen que hacer cálculos que relacionan diferentes cantidades en situaciones cada vez más complejas.

La facilidad de los niños a la hora de manejar las generalizaciones llamadas números, su capacidad para hacer cálculos, por ejemplo, con números enteros, números positivos y negativos, fracciones... es fundamental para casi todo su progreso posterior con las matemáticas.

Trabajar con números conduce a los alumnos a un mundo de objetos inventados que están significativamente conectados. Es necesario que comiencen a realizar generalizaciones, después de establecer relaciones numéricas, porque si no, sus cálculos seguirán siendo muy primitivos. Generalmente, los alumnos que no progresan en cálculo utilizan procedimientos de conteo laboriosos, muy básicos y poco eficaces. El análisis e interpretación de las relaciones entre los números hace posible la generalización y, a la vez, da pistas respecto a qué imágenes o ilustraciones resultarán de más ayuda para los niños.

Básicamente, para calcular con eficacia, los alumnos tienen que explorar las relaciones de los números entre sí. En otras palabras, necesitan investigar las diversas maneras en las que las generalizaciones sobre cantidades están conectadas unas con otras. Por ejemplo, la forma en que se ordenan los números es importante, como también lo son las equivalencias del tipo  $6 + 2$  es igual a  $8$ . Es importante el hecho de que si se suman dos números en el orden que sea, el resultado sea el mismo. Como también lo es el hecho de que, si se suman más de dos números, no importa el orden en que se haga. Los números «0» y «1» son peculiares en el sentido de que *sumar 0* o *multiplicar por 1* no produce ningún efecto.

La suma es lo opuesto a la resta, de la misma manera que la multiplicación es lo contrario a la división. Curiosamente, la suma y la multiplicación parecen estar estrechamente conectadas entre sí, de la misma manera que la división y la resta. Estas son generalizaciones sobre cómo los números están relacionados unos con otros y revisten una importancia crucial de cara a la eficacia del cálculo de los alumnos.



El uso de colecciones no estructuradas de objetos para la representación de relaciones numéricas, como las mencionadas antes, es poco clara y solo sirve para que los niños infieran unas relaciones a partir de ellas. Estos grupos no organizados de, por ejemplo, cubos y fichas, sirven para las primeras prácticas de conteo. Sin embargo, si como imágenes o ilustraciones siguen estando desorganizadas, constituyen un pobre fundamento para el cálculo. Es muy difícil mediar cualquier comunicación sobre relaciones numéricas con grupos de cosas no organizados.

Numicon elige objetos e imágenes con el objetivo específico de mediar en la comunicación de relaciones numéricas. En la comunicación matemática se introducen objetos e imágenes que ilustran o representan, por encima de todo, las formas en las que los números están conectados. Cuando se presentan colecciones aleatorias de objetos diversos, siempre se espera que los alumnos los pongan en orden: que establezcan relaciones en lo que ven.

Numicon utiliza una gran diversidad de acciones, objetos e imágenes para que los alumnos generalicen a partir de sus experiencias y conversaciones.

Se utilizan líneas numéricas de diversos tipos para contextualizar las relaciones de orden de los números, Formas Numicon para mostrar patrones y Regletas Numicon para que los niños puedan relacionar los tamaños de los números entre sí de muchas más formas de las que permiten las líneas numéricas.

Las colecciones de objetos no estructurados se introducen para que los alumnos puedan trabajar estructuras de orden (cuando cuentan) o para descubrir cuántos son sin tener que contar.

Numicon ofrece materiales manipulativos e imágenes especialmente adecuados para representar e ilustrar relaciones y presentar a los alumnos experiencias *enactivas* e *icónicas* que les permiten manipular representaciones simbólicas de sus generalizaciones (números y palabras) de forma eficaz durante el cálculo.

### La importancia del contexto

Esta exposición comenzaba señalando que existe el deseo de que, cuando los alumnos terminen el colegio, puedan utilizar las matemáticas fuera del contexto escolar, en su vida cotidiana y en su trabajo. Dicho de otra forma, deberían saber resolver problemas matemáticos nuevos. De este modo, deben ser capaces de explorar y detectar relaciones claves en situaciones nuevas y desconocidas, y usarlas para que se conviertan en predecibles.

Por lo general, el uso de las matemáticas también implica que los alumnos se adentren en el mundo de las generalizaciones matemáticas (cálculo) antes de volver a la situación práctica con uno o más números que deben ser interpretados dentro del contexto concreto del problema.

Los alumnos deben saber cuándo los datos y técnicas generalizados son útiles, a través del contexto y de lo que se habla. Dentro de Numicon, cada grupo de actividades comienza con una situación cuidadosamente elegida en la que las matemáticas que han de aprenderse resultan útiles.

El trabajo comienza con un grupo de actividades que explica las relaciones dentro de las cuales se establece la necesidad de algún tipo de respuesta matemática; los alumnos



comentan sus respuestas iniciales a las preguntas y desafíos planteados antes de pasar a generalizar las matemáticas que han de aprender a través de dichas actividades.

En las actividades prácticas, los alumnos tienen oportunidad de utilizar las matemáticas que están trabajando, en contextos más concretos, aprendiendo a juzgar cuándo dicha generalización matemática puede ser útil.

En las tareas de los materiales del alumno, a los niños se les presentan desafíos que les invitan a utilizar las matemáticas que han estado aprendiendo en situaciones no habituales y desconocidas. Estas tareas les animan a buscar relaciones en terrenos inexplorados.

## En resumen

La clave para entender Numicon está en reconocer que utilizar las matemáticas implica aprender a **comunicarse matemáticamente** y cómo esta comunicación se realiza esencialmente mediante **generalizaciones**.

Durante la utilización de las matemáticas, a menudo las generalizaciones se transforman en cosas que no se pueden ver: *los objetos matemáticos*.

La comunicación es clave para el uso de las matemáticas, porque durante la misma se realizan las generalizaciones.

Sin embargo, la comunicación con generalizaciones no es fácil. Para ayudar a los alumnos a moverse entre el mundo de las generalizaciones matemáticas y el de las situaciones concretas, siempre se necesitará desarrollar la comunicación mediante **la actividad, el desarrollo de una imagen mental y el diálogo** mientras los niños **exploran relaciones** que pueden ver y sentir físicamente.

